DOCUMENT RESUME

ED 229 253 SE 041 455

AUTHOR Keranto, Tapio
TITLE Matemaattiset Ajatteluprosessit Ja Strategiat: Yhteydet Yksilon Tiedolliseen Rakentumiseen Ja Informaation Kasittelykapasiteettiin = Mathematical Thought Processes and Strategies: Their Relationship with Cognitive Structuring and Information Processing Capacity. Tampereen Yliopiston Hameenlinnan Opettajankoulutuslaitos. Julkaisu No. 8.
INSTITUTION Tampere Univ., Hameelinna (Finland). Dept. of Teaching Training.
REPORT NO ISBN-951-44-1403-9
PUB DATE Apr 83
NOTE 193p.; Material may be marginally legible.
PUB TYPE Reports - Research/Technical (143)
LANGUAGE Finnish

EDRS PRICE MF01/PC08 Plus Postage.
DESCRIPTORS *Cognitive Development; *Cognitive Processes; Correlation; Elementary Education; *Elementary School Mathematics; *Learning Theories; Mathematical Concepts; *Number Concepts; Primary Education
IDENTIFIERS *Mathematics Education Research; *Piaget

ABSTRACT

This report, written in Finnish with a 10-page summary in English, concerns research on the interrelationship between Piagetian operations, various aspects of information processing capacity and mathematical thought processes and strategies related to number and measurement. In a theoretical discussion, Piaget's research on mathematico-logical thinking in the light of information-processing theory is discussed. In the experiment, 35 first-grade pupils were interviewed individually; the tasks presented to them are described. Piagetian abilities appeared to predict arithmetical performance and especially strategies. Information processing capacity appeared to be closely tied to specific content. Sequence skills were also reported to be related to arithmetical performance, as well as to Piagetian abilities. (MNS)

****
* Reproductions supplied by EDRS are the best that can be made *
* from the original document. *
****

MATEMAATTISET AJATTELUPROSESSIT JA STRATEGIAT:

YHTEYDET YKSILÖN TIEDOLLISEEN RAKENTUMISEEN

JA INFORMAATION KÄSITTELYKAPASITEETTIIN

ENGLISH SUMMARY

Mathematical Thought Processes and Strategies:
Their Relationship with Cognitive Structuring and
Information Processing Capacity

Tampereen yliopiston Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitos.

Julkaisu no 8.

Hämeenlinna 1983

SAATTEEKSI

Kun koulutus nähdään keinona yhteiskunnan kehittämiseen, seuraa tästä luonnollisesti, että opetussuunnitelmat on huolellisesti laadittava ja opetus toteutettava suunnitelman mukaisesti. Tällainen ajattelu on ollut vallalla kouluopetuksessa menneenä vuosikymmenenä. Koulutuksen muutokset aikaansaavat kuitenkin moninaisia vuorovaikutuksia, jotka toimivat usein asetettuja pyrkimyksiä vastaan. Voidaan todeta, että opetus-oppimis -prosessista tiedetään aivan liian vähän, jotta uusien yksityiskohtaisten opetussuunnitelmien toteutus onnistuisi odotetulla tavalla. Matematiikka oppiaineena ei tee poikkeusta esitetystä luonnehdinnasta. Maailmanlaajuinen opetuksen uudistus aikaansai odottamattomia seuraamuksia, jotka toimivat uudistuksen päämääriä vastaan. Toivottavasti opimme tästä sen, että todelliset uudistukset on rakennettava laaja-alaisten tutkimusten varaan. Tutkimuksen on kohdistuttava myös yksittäisen oppilaan ajatteluprosesseihin asti. KT Tapio Kerannon tutkimus ensiluokkalaisten oppilaiden spontaaneista ajattelutavoista matemaattisessa oppiaineksessa viitoittaa tietä tälle suunnalle.

Kerannon tutkimus on monella tavalla huomionarvoinen. Teoreettisesti se sitoo Piaget'n usein intuitiiviset käsiterakennelmat uudemman kognitiivisen psykologian käsitteistöön ja ajattelutapoihin. Tutkimusmenetelmällisesti Keranto hankkii empiirisen aineiston testeillä, joiden kuhunkin osioon on viritetty teoriasta johdetut avainnäkökohdat, kuitenkin niin, että oppilaan suorituksissa tulee esille keskeiset kvalitatiiviset piirteet yhdessä lopullisen produktin kanssa. Saatu aineisto, joka on suuresti myös kvalitatiivista, luokitellaan Piaget'n tutkimustraditioon nojautuen numeriselle asteikolle ja käsitellään kvantitatiivisilla analyysimenetelmillä. Aineisto on lisäksi pyritty saamaan niin kattavaksi ja mittausteknillisesti luotettavaksi, että sen varassa on voitu pyrkiä luomaan kokonaiskuvaus lukukäsitteen hallintaan, aritmeettisiin laskusuorituksiin ja ajattelun operaatioihin liittyvistä tekijöistä.

Kuvaukseen tarvittava muuttujamäärä on varsin suuri ja tutkimus on raportoitu tiiviisti. Tämän vuoksi lukijan on nähtävä vaiva tarkasti rinnastaa kukin muuttuja ja vastaavat operationaaliset testiosiot, sillä suoritusten laadulliset piirteet, erityisesti käytetyt strategiat, ovat aivan keskeisiä tulosten ymmärtämiseksi. Vaivannäön palkaksi tutkimus johdattaa lukijan syvällisesti oppilaiden ajattelutapojen ymmärtämiseen, mikä antaa hyvän pohjan didaktisille ratkaisuille.

Jarkko Leino

ESIPUHE

Tämä työ on eräiltä osin syvennys, laajennus ja tarkennus aiemmille matematiikan didaktiikan alueeseen kuuluville tutkimuksilleni. Tutkimusote on muuntunut vähin erin yhä enemmän informaation prosessoinnin tarkastelun suuntaan. Tähän ovat vaikuttaneet matematiikan kasvatuksen alueen uusimmat tutkimusvirtaukset, joissa yksilön ongelman ratkaisua pyritään kuvailemaan ja selittämään niiden osatoimintojen termein, joita tarvitaan tehtävän suorituksessa. Tällä tavoin tullaan yhä lähemmäksi käytännön kouluelämää ja sovellutusmahdollisuuksia.

Tämän työn valmistumiseen ovat vaikuttaneet monet tekijät. Ensinnäkin sisäinen motiivi selvittää kielen, ajattelun ja oppimisen välisiä suhteita matemaattisten sisältöjen yhteydessä ei liene vähäarvoisin. Toiseksi apulaisprofessori Jarkko Leinon kannustava suhtautuminen tutkimuksiini on huomattavassa määrin edesauttanut tämän työn valmistumista ja tutkimusparadigman muuntautumista matemaattisten ajatteluprosessien ja strategioiden tutkimisen suuntaan. Olen kiitollinen myös siitä, että apulaisprofessori Leino on lupautunut tämän työn saatteeksi-sanojen kirjoittajaksi. Myös professori Jukka Lehtinen ja apulaisprofessori Pekka Ruohotie ovat kannustaneet tämän työn tekemiseen ja perehtyneet työn käsikirjoitukseen. Yliopiston lehtori Ian Gurney on kääntänyt työn englanninkielisen tiivistelmän sekä Hilkka Toivonen suorittanut työn puhtaaksikirjoituksen. Kiitokset heille kaikille.

Kiitollisuuteni kohdistan myös Emil Aaltosen Säätiölle, joka on hyvin merkittävällä tavalla tukenut taloudellisesti omistautumistani vähäksi aikaa pelkästään tutkimustyölle. Ilman tätä tukea ei näin laaja-alaista tutkimusta olisi ollut mahdollista suorittaa.

Kovin tärkeää ja välttämätöntä on ollut myös se, että "kotikenttä" on pitänyt. Tämä viittaa Tampereen yliopiston Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitokseen, Hämeenlinnan normaalikouluun sekä perheeseeni.

Tutkimukselle oli otollinen ilmapiiri, hyvät tilat sekä motivoituneet haastateltavat. Uskon ja toivon, että nyt aloittamani pitkittäistutkimus tulee jatkossa etenemään yhtä suotuisissa merkeissä. Tästä olisi hyötyä, näin oletan, sekä matematiikan kasvatuksen tutkimukselle että opetukselle tässä maassa.

Hämeenlinnassa, huhtikuussa 1983

Tapio Keranto

SISÄLLYSLUETTELO

SAATTEEKSI

ESIPUHE

I JOHDANTO 1

II TUTKIMUKSEN YLEINEN RAKENNE JA MENETELMÄT 6

1. Rakenne 6
2. Menetelmät 7

III A TIEDOLLINEN STRUKTUROITUMINEN JA PIAGET-KYVYT 10

1. Skeemat ja matemaattinen ongelmanratkaisu 12
2. Kognitiiviset asteet ja sisällöt 13
3. Piaget-kyvyt ja siirtymän idea 15
4. Kvantitatiivinen vertailu 17
5. Kvantiteetin säilyvyys 19
6. Transitiivi- ja substituutio-päätelmät 23
7. Luokkien inkluusiopäätelmät 25

III B PIAGET-KYKYJEN KOKEELLINEN NÄKÖKULMA 28

1. Relaationaaliset kyvyt; mittari ja pisteytys 28
2. Inkluusiokyvyt; mittari ja pisteytys 30
3. Säilyvyyskyvyt; mittari ja pisteytys 31
4. Suoritusten oikeellisuusprosentit 32
5. Tiedostamiseen perustuvien Piaget-kykyjen riippuvuus- ja kehityssuhteet 34

IV A INFORMAATION KÄSITTELYKAPASITEETTI JA MUISTAMINEN ... 38

1. Informaation käsittelykapasiteetti 40
2. Informaation käsittelykapasiteetin operationalisointi matemaattisten sisältöjen yhteydessä 41
3. Piaget-kyvyt ja informaation käsittelykapasiteetti 43

IV B INFORMAATION KÄSITTELYKAPASITEETIN (IPC) KOKEELLINEN NÄKÖKULMA 45

1. Yleisiä huomioita IPC-mittareista 45
2. IPC-mittarit; luotettavuusongelmia 47
3. IPC-kykyjen luokittelu 50
4. Missä määrin IPC-kyvyt korreloivat keskenään? 52
5. Mikä on spesifien IPC-kykyjen merkitys Piaget-kykyjen hankkimiselle? 53
6. Missä määrin IPC-kyvyt selittävät Piaget-kykyjä ja kääntäen? 54

V A LUKUJONOTAIDOT JA LASKEMINEN 57

1. Keskeiset lukujonotaidot 58
2. Lukujonotaitojen kehittyminen 59

V B LUKUJONOTAITOJEN KOKEELLINEN NÄKÖKULMA 65

1. Lukujonotaitojen mittari sekä pisteytykset 65
2. Lukujonotaitojen suoritusprosentit ja luotettavuus 66
3. Missä määrin spesifit lukujonotaidot hierakisoituvat? 68

4. Mitkä ovat spesifien lukujonotaitojen keskinäiset riippuvuussuhteet? 71
5. Missä määrin kognitiiviset kyvyt säätelevät lukujonotaitoja? 72
6. Missä määrin IPC-kyvyt selittävät lukujonotaitoja ja kääntäen? 74
7. Missä määrin Piaget-kyvyt selittävät lukujonotaitoja? 76
8. Missä määrin kognitiiviset IPC- ja Piaget-kyvyt kykenevät yhdessä selittämään lukujonotaitoja 78
9. UPBY- ja DOBY-taitoihin liittyvät muistamisstrategiat 79
10. Missä määrin Piaget- ja IPC-kyvyt sekä lukujonotaidot kykenevät erikseen ja yhdessä selittämään yhdistettyjä UPBY- ja DOBY-strategiamuuttujia SUPD02, SUPD05 ja SUPD08? 80
11. Käytettyjen kriteerien vaikutus Piaget-kykyjen selitysvoimaan 82

VI A ARITMEETTISET PROSESSIT JA STRATEGIAT: YHTEYDET KOGNITIIVISIIN KYKYIHIN SEKÄ LUKUJONOTAITOIHIN 83

1. Perustavat yhteen- ja vähennyslaskutyypit 83
2. Perustavissa yhteen- ja vähennyslaskutyypeissä käytetyt strategiat 85
3. Aritmeettisten prosessien lyhentymisen ongelma 86
4. Kognitiivisten kykyjen merkitys aritmeettisten prosessien ja strategioiden kehittymiselle 89

VI B ARITMEETTISTEN PROSESSIEN JA STRATEGIOIDEN KOKEELLINEN NÄKÖKULMA 91

1. Aritmeettisten kykyjen mittari sekä pisteytykset .. 91
2. Suoritusten oikeellisuuteen perustuvat suoritusprosentit 93
3. Käytettyjen suoritusstrategioiden prosenttiluvut ja luotettavuus 94
4. Mikä on aritmeettisten ja kardinaalisten kykyjen keskinäinen vaikeusjärjestys?..... 98
5. Aritmeettisten ja kardinaalisten kykyjen riippuvuussuhteet 99
6. Missä määrin kognitiivisten kykyjen ja lukujonotaitojen kehittymättömyys heijastuu aritmeettisiin suorituksiin ja strategioihin? 100
7. Missä määrin Piaget-kyvyt selittävät aritmeettisia suorituksia? 103
8. Missä määrin Piaget-kyvyt selittävät aritmeettisia strategioita? 105
9. Missä määrin IPC-kyvyt selittävät aritmeettisia suorituksia? 107
10. Missä määrin IPC-kyvyt selittävät aritmeettisia strategioita? 108
11. Missä määrin lukujonotaidot selittävät aritmeettisia suorituksia? 110
12. Missä määrin lukujonotaidot selittävät aritmeettisia strategioita? ..... 111.
13. Kuinka hyvin lukujonotaidot ja kognitiiviset kyvyt yhdessä kykenevät selittämään aritmeettisia suorituksia? 113

14. Kuinka hyvin lukujonotaidot ja kognitiiviset kyvyt yhdessä kykenevät selittämään aritmeettisia strategioita? 114

VII A MITTAUSKYVYT 115

1. Pätevän pituuden mittauskyvyn vaatimukset 116
2. Mittauskyvyn kehitys esinumeerisissa yhteyksissä 117
3. Mittaluvun kehitys 119
4. Kognitiivisten kykyjen merkitys pituuden mittauskyvyn kehitykselle 121

VII B MITTAUSKYKYJEN KOKEELLINEN NÄKÖKULMA 125

1. Mittauskykyjen mittari sekä pisteytykset 125
2. Mittauskykyjen suoritusprosentit ja luotettavuus 127
3. Missä määrin kognitiivisten kykyjen kehittymättömyys heijastuu mittaussuorituksiin ja strategioihin? 130
4. Missä määrin kognitiiviset kyvyt selittävät mittaussuorituksia ja strategioita? 132
5. Missä määrin aritmeettis-kardinaaliset kyvyt ja lukujonotaidot kykenevät selittämään mittaussuorituksia ja strategioita? 133

VIII TUTKITTAVAN KOGNITIOKENTÄN RIIPPUVUUSSUHTEIDEN MALLIT SEKÄ KYTKENNÄT MATEMATIIKAN ALKUOPETUKSEEN JA OPPIMISVAIKEUKSIIN 135

1. Tutkittavan kognitiokentän osa-alueiden "makromuuttujat" sekä niiden korrelaatiot 135
2. Tutkittavan kognitiokentän riippuvuussuhteiden mallit 136
3. Matematiikan oppimisvaikeuksiin liittyviä kysymyksiä 141
4. Pitkistä prosesseista ekonomisiin prosesseihin . 142
5. Aritmeettisten prosessien ja strategioiden kehittämiseen vaikuttavista taustatekijöistä 143
6. Keskeisten aritmeettisten tehtävätyyppien oppimisesta ja opetuksesta 145

IX KOONTA JA POHDISKELUA 147

ENGLISH SUMMARY 155

KIRJALLISUUS 166

LIITTEET

1 JOHDANTO

Tässä työssä tutkitaan seuraavien matematiikan kasvatuksen osa-alueiden riippuvuus- ja vaikutussuhteita:

A. Piaget-kyvyt (operaatiot) sekä niihin liittyvät tiedostamisen asteet
B. Yksilön informaation käsittelykapasiteetti numeerisissa yhteyksissä
C. Yksilön lukukäsitteen kehitykseen liittyvät matemaattiset ajatteluprosessit ja strategiat numeerisissa yhteyksissä
D. Yksilön mittaamisen taitoihin liittyvät ajatteluprosessit ja strategiat

Tutkimusta ovat stimuloineet viimeaikaisimmat kognitiivisen psykologian ja matematiikan kasvatuksen tutkimustyöt sekä Piaget'n koulukunnan matemaattis-loogisen ajattelun kehitystä valaisevat tutkimukset (Beth & Piaget 1966, Brainerd 1978, Carpenter et al 1981, 82, Case 1980a, b, Fuson & Hall 1982, Hiebert 1981, Klahr & Wallace 1976, Leino 1981a, Neisser 1967). Myös neuvostopsykologien Galperin, Georgiev ja Vygotsky töillä on merkitystä tämän työn tutkimusparadigman muotoutumiseen (Galperin 1957, Galperin & Georgiev 1969, Vygotsky 1962). On luonnollista, että oma osansa tutkimuskohteen valinnalle ja tutkimusparadigman muotoutumiselle on tutkijan aikaisemmilla töillä (Keranto 1978, 1979, 1980, 1981 ja 1982). Itse asiassa tämä työ on syvennys, laajennus ja tarkennus mainituille töille. Tämän ohella tutkimusparadigma on muuntunut yhä enemmän informaation prosessoinnin tutkimisen suuntaan. Tämä on sikäli järkevää, että on yhä selvemmin nähtävissä Piaget'n strukturalismin heikkoudet ja etäisyys käytännön koulutyön tavallisista matemaattisista ongelmista ja niiden ratkaisuprosesseista ja strategioista. Piaget'n töissä korostuu mainitun osa-alueen A. tutkimus. Suurelta osin on jäänyt selvittämättä yhteydet yksilön informaation kapasiteettiin ja erityisesti matemaattisiin ajatteluprosesseihin ja strategioihin numeerisissa yhteyksissä. Tästä johtuu, että Piaget'n strukturalismilla on tällä hetkellä kovin vähän sanottavaa osa-alueen A. riippuvuus- ja vaikutussuhteista osa-alueisiin B.-D. Toisaalta on viitteitä siitä, että Piaget'n tutkimilla luokittelu-, relaatio- ja

säilyvyysoperaatioilla on yhteyksiä tiettyihin yhteen- ja vähennyslaskutyyppeihin, kun taas tiettyihin laskutyyppeihin esinumeeristen operaatioiden vaikutukset ovat kovin vähäisiä (Carpenter et al 1982, Keranto 1981).

On siis tutkimisen arvoista missä määrin ja miten Piaget'n tutkimat esinumeeriset operaatiot selittävät menestymistä käytännön aritmeettisissa tehtävissä ja mittalukuyhteyksissä. Samoin on tärkeää tietää, miten ja missä määrin lasten käyttämät strategiat riippuvat esinumeeristen operaatioiden kehitystasosta. Saattaahan olla niin, että on olemassa tiettyjä kriittisiä kognitiivisia kykyjä, joiden vajavuus ehkäisee kehittyneempien ratkaisustrategioiden käytön ja hankkimisen. Tällöinhän lapsi joutuisi turvautumaan primitiivisempiin keinoihin, jotka eivät ole enää päteviä.

Tutkimuksen yksi keskeinen tehtävä esitetään kysymyksen muodossa:

A. Missä määrin ja miten Piaget-kyvyt (tai operaatiot) säätelevät yksilön suoriutumista ja strategioita käytännön kannalta keskeisissä yhteen- ja vähennyslaskutyypeissä?

Tutkimuksen toinen päätehtävä liittyy yksilön kykyyn käsitellä tiedon palasia yhtäaikaisesti lyhytaikaisessa muistissa. Tämä informaation käsittelykapasiteetti on loogisen analyysin näkökulmasta toinen tärkeä tekijä, joka saattaa säädellä lasten aritmeettisia ja mittaussuorituksia ja strategioita. Case esittää, että minkä tahansa tehtävän toimeenpanevan strategian hankkiminen ja soveltaminen vaatii erityisen kokoista työ- tai lyhytaikaista muistia. Tämän ohella hän esittää, että mitä paremmin lapsi on tutustunut tiettyyn älylliseen operaatioon, sitä vähemmän tämän operaation toimeenpano rasittaa muistia. Case'n tutkimukset viittaavat siihen, että esimerkiksi Piaget'n tyyppisissä kokeissa menestyminen on suuresti kiinni kyvystä käsitellä työmuistissa informaation palasia yhtäaikaisesti. Toisin sanoen monissa tapauksissa on se tilanne, että lapsi omaa tarvittavat osataidot tai skeemat, mutta ei kykene yhdistelemään niitä oikealla tavalla (Case 1980a, b). Myös Carpenter

et al suorittamat kokeet muistin merkityksestä aritmeettisissa suorituksissa viittaa samaan suuntaan (Carpenter et al 1982). Toisaalta Hiebertin tutkimus muistin ja loogisen päättelykyvyn yhteyksistä tiettyihin mittaamistoimintoihin osoittaa toista. Työssä todettiin, että myös komplekseissa mittaustehtävissä muistikapasiteetti ei ollut ratkaiseva. Hiebert esittää ainakin kaksi mahdollisuutta syntyneelle tilanteelle (Hiebert 1981). Ensinnäkin tehtävien asettamat paineet tutkittavien lasten työmuistille saattoivat olla muistikapasiteetin sisällä. Toiseksi muistamistestinä käytettiin lukujonotaitoihin liittyvää mittaa eikä mittaamiseen spesifisti liittyvää mittaa. Toisin sanoen tutkittaessa jotain matemaattista sisältöä pitäisi siihen konstruoida sisältöspesifi muistamiskapasiteetin mitta. Itse asiassa tässä tutkimuksessa kokeillaan neljää sisältöspesifiä mittaa sekä tullaan vertaamaan lasten suorituksia näiden suhteen toisiinsa.

Tämän työn toinen keskeinen tehtävä esitetään kysymyksen muodossa seuraavasti:

B. Mitkä ovat informaation käsittelykapasiteetin yhteydet Piaget-kykyihin sekä aritmeettisiin ja mittauksellisiin suorituksiin ja strategioihin?

Tämän työn kolmas päätehtävä liittyy lukujonotaitoihin sekä niiden yhteyksiin aritmeettisiin laskutoimituksiin ja kohtien A. ja B. kognitiivisiin kykyihin. Lukujonotaidoilla tarkoitetaan tässä lukusanojen jonoon yksi, kaksi, kolme etc. liittyviä spesifejä toimintoja, joista tunnetuin on ehkä lukujen sovinnainen luettelu (vrt. Fuson & Hall 1982 ja Keranto 1981). Toisin sanoen lukujonoyhteydessä lukusanat esiintyvät niiden sovinnaisessa järjestyksessä ja mihinkään ulkoisiin objekteihin ei tässä yhteydessä välttämättä tarvitse viitata. Perushypoteesina on, että lukusanat ovat aluksi välineitä muodostettaessa lukukäsitettä ja tulevat vasta myöhemmin käsitteen todellisiksi symboleiksi. Toisin sanoen lukusanojen merkityksen löytäminen tapahtuu niiden käytön yhteydessä. Perushypoteesin mukaisesti mainitut lukujonotaidot säätelevät oletettavasti erilaisten merkitysten löytämistä. Itse asiassa vasta pitkän kehityksen tuloksena lukusanojen erilaiset selitykset -

lukujonosisältö, laskemissisältö, kardinaalisisältö ja ordinaalisisältö - integroituvat lapsen mielessä. Aluksi esimerkiksi lukujen sovinnainen luettelu on osin irrallinen toiminto lukumäärä-, järjestys- ja mittalukutoiminnoista. Samoin lapsi oppii ilmeisesti vasta pitkällisen kehityksen tuloksena tajuamaan, että laskettavien objektien järjestysluvuista voidaan päätellä myös objektien lukumäärään liittyviä asioita (vrt. Fuson & Hall 1982, Gelman & Gallistel 1978, Keranto 1981, Piaget 1952, Vygotsky 1962). Tällä hetkellä on vielä kovin vähän tietoa mainitusta integroitumisprosessista sekä siitä, miten lukujonotaidot säätelevät omalta osaltaan laskusuorituksia. Tutkimuksen kolmantena päätehtävänä pyritään selvittämään lukujonotaitojen yhteyksiä muihin esiteltyihin toimintoihin:

C. Miten lukujonotaidot liittyvät ja säätelevät yhteen- ja vähennyslaskusuorituksia ja strategioita sekä mitkä ovat niiden yhteydet Piaget-kykyihin ja informaation käsittelykapasiteettiin?

Tutkimuksen neljäs päätehtävä on lujasti sidoksissa kolmanteen päätehtävään ja matematiikan alkuopetukseen. Tutkimuksessa pyritään löytämään lukujonotaitojen hierarkia tai hierarkiat. Tässä ovat apuna Fusonin ja Noeltingin tutkimukset (Fuson et al 1981, Fuson & Hall 1982, Noelting 1980a, b). Fusonin työt koskettelevat loogisen ja kokeellisen analyysin perusteella lukujonotaitoja. Noeltingin työt taas antavat vihjeitä matemaattisten suoritusten ja strategioiden hierarkisoitumismenetelmiä ja pohdiskeluja varten. Mikäli tämän työn loogiseen etukäteisanalyysiin perustuvissa kokeellisissa mittauksissa ja analyyseissä löydetään lukujonotaitojen ja ehkä myös laskutaitojen hierarkisia rakenteita, ovat nämä ennemmin tai myöhemmin sovellettavissa matematiikan alkuopetukseen. Neljäs päätehtävä esitetään kysymyksen muodossa seuraavasti:

D. Muodostavatko keskeiset lukujonotaidot sekä yhteen- ja vähennyslaskutyypit hierarkioita ja miten nämä hyödynnettäisiin matematiikan alkuopetuksessa?

Mittauskykyjen osalta tämä työ on lähinnä tunnusteleva. Täten mittauskykyihin nähden ei ole asetettu mitään päätehtävää,

vaikkakin työssä tarkastellaan mittauskykyjen suhteita muihin tutkittavan "kognitiokentän" osa-alueisiin. Tämä tarkastelu tapahtuu sekä "mikrotasolla" että "makrotasolla". Mikrotason tarkastelut viittaavat yksittäisiin osioihin tai näistä saatuun tiettyä ongelmatyyppiä kuvaavaan summamuuttujaan. Makrotason tarkastelut viittaavat kunkin tutkittavan osa-alueen kaikista muuttujista muodostettuihin "makromuuttujiin". Näiden makromuuttujien riippuvuussuhteiden tutkimus on viides tämän tutkimuksen päätehtävä. Tämä tehtävä voidaan esittää kysymyksen muodossa seuraavasti:

E. Mitkä ovat tutkittavan kognitiokentän osa-alueiden - Piaget-kyvyt, IPC-kyvyt, lukujonotaidot, aritmeettis-kardinaaliset kyvyt, mittauskyvyt - riippuvuussuhteet suoritusten oikeellisuuden ja strategioiden näkökulmasta?

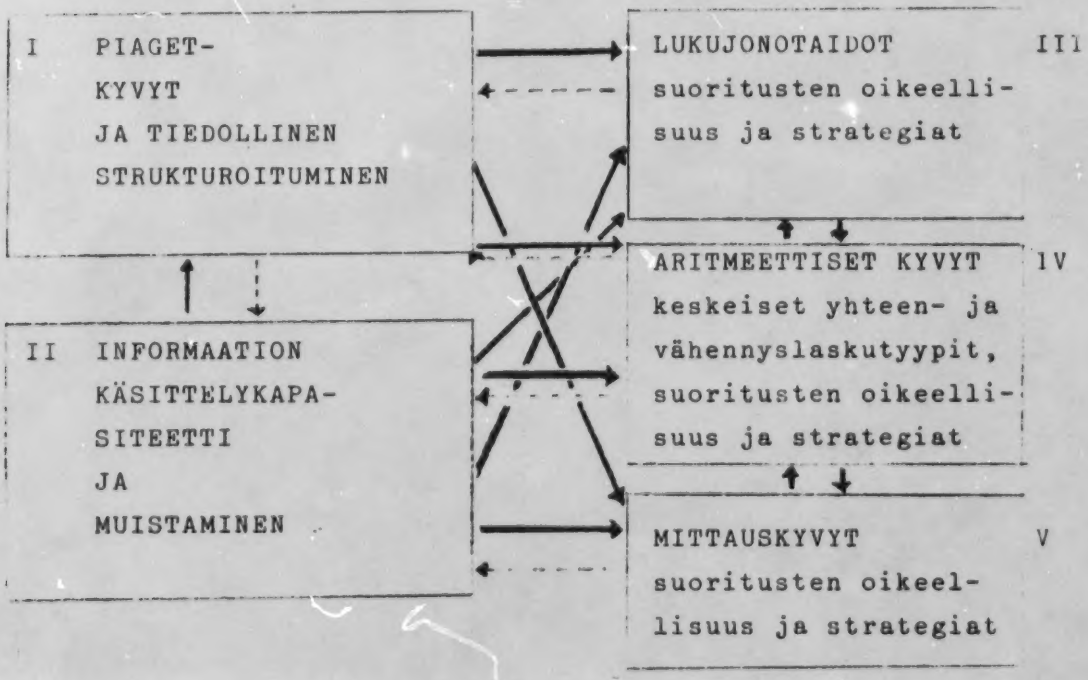
Viidenteen päätehtävään liittyen esitetään riippuvuussuhteiden mallit, joista pitäisi siis ilmetä myös mittauskykyjen suhteet aritmeettis-kardinaalisiin kykyihin sekä esinumeerisiin toimintoihin ja lukujonotaitoihin. Näitäkin malleja on ilmeisesti mahdollisuus hyödyntää matematiikan alkuopetuksen opetussuunnitelmien laadinnassa, oppikirjojen teossa sekä opetuskäytännössä. Näin on ainakin tarkoitus! On kuitenkin jo tässä vaiheessa syytä huomauttaa, että tämä työ ei tule antamaan eksplisiittisiä vastauksia kysymykseen, miten tutkitut spontaanit ajatteluprosessit ja strategiat on liitettävissä matematiikan kirjalliseen symboliikkaan. Tämä johtuu siitä, että tässä työssä keskitytään lasten spontaaneihin matemaattisiin ajatteluprosesseihin toiminnallis-suullisissa tilanteissa. Toisaalta työssä tullaan kuitenkin lyhyesti keskustelemaan siitä, miten toiminnallis-suullisesta vaiheesta siirrytään matematiikan kirjalliseen symboliikkaan ja mitä ongelmia tähän saattaa liittyä. Samoin tullaan lyhyesti tarkastelemaan matematiikan oppimisvaikeuksien ennakointia ja voittamista spontaanien prosessien ja strategioiden näkökulmasta. On nimittäin viitteitä siitä, että juuri heikommat lapset käyttävät pitkiä toimintoja aritmeettisten tehtävien suorituksessa. Tällaiset informaation prosessoinnin kannalta tuhlailevat toiminnot saattavat olla yksi keskeinen syy oppimisvaikeuksiin. Miten nämä pitkät

toiminnot voitaisiin lyhentää, on yksi tämän työn sovellutusnäkökohtia. Nyt siirrytään työn yleisen rakenteen ja menetelmien tarkasteluun.

II TUTKIMUKSEN YLEINEN RAKENNE JA MENETELMÄT

1. Rakenne

Kuten johdannosta ilmenee, on tämän työn tutkimuskohde laaja ja varsin kompleksinen. Tästä johtuen olen päätynyt seuraaviin käytännön järjestelyihin. Kunkin luvun alussa on lyhyt teoreettinen pohdiskelu ja aikaisempien tutkimustulosten esittely. Tätä seuraa osa-alueen kokeelliset ongelmat, tulosten analysointi ja tarkastelu. Kokeelliset tulokset ja niihin liittyvät tarkastelut hierarkisoidaan siten, että aina edeltävien osa-alueiden suorituksilla ja strategioilla pyritään selittämään seuraavan osa-alueen suorituksia ja strategioita ja osin kääntäen. Työn etenemisrakenne on esitetty kaaviossa 1.



Kaavio II 1. Tutkimuskenttä sekä tutkittavien osa-alueiden käsittelyjärjestys I - V

Verbaalisesti ilmaistuna on tutkimuksen käsittelysysteemi seuraava. Ensin tarkastellaan lyhyesti esinumeerisiin toimintoihin ja Piaget'n operaatioihin liittyviä teoreettisia kysymyksiä ja viimeaikaisimpia tutkimustuloksia. Tämän jälkeen esitellään tämän osa-alueen ongelmat, käytetty mittari sekä saavutetut tulokset. Vastaavasti menetellään seuraavan osa-alueen, jossa tarkastellaan informaation käsittelykapasiteettia ja lyhytaikaista muistia, suhteen. Lisäyksenä edelliseen on se, että nyt tarkastellaan myös kahden ensimmäisen osa-alueen riippuvuus- ja vaikutussuhteita toisiinsa. Viidennessä luvussa "otetaan leikkiin mukaan" lukujonotaidot sekä näiden taitojen yhteydet esinumeerisiin toimintoihin ja informaation käsittelykapasiteettiin. Kuudes luku on tämän työn vaativin ja kompleksisin. Yritetäänhän tässä luvussa selittää keskeisissä yhteen- ja vähennyslaskutyypeissä menestymistä ja strategioita aikaisemmin mainittujen osa-alueiden kyvyillä ja strategioilla. Viides ja kuudes luku ovat lähinnä diskreettien objektien muodostamien joukkojen kvantifiointiin liittyvien kysymysten tarkastelua. Seitsemännessä luvussa on taas kysymys jatkuvien suureiden kvantifiointiin liittyvistä kysymyksistä. Tässä luvussa tarkastellaan pituuden mittauksen problematiikkaa lapsen näkökulmasta. Tältä osin tutkimus on alustava kartoitus. Kahdeksannessa luvussa esitetään tutkittavan kognitiokentän osa-alueiden - Piaget-kyvyt, IPC-kyvyt, lukujonotaidot, aritmeettiset kyvyt, mittauskyvyt - riippuvuusmallit sekä tarkastellaan saavutettujen tulosten sovellutusmahdollisuuksia matematiikan alkuopetukseen ja oppimisvaikeuksien ennakointiin ja voittamiseen. Viimeinen luku on varattu koonnille ja pohdiskelulle.

2. Menetelmät

Tutkimuksen kokeelliset mittaukset suoritettiin Tampereen yliopiston Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitoksen normaalikoulussa alkaen 25.8.1982 ja päättyen 15.10.1982. Kaikki kyseisen koulun ensimmäisen luokkatason oppilaat (N = 36) osallistuivat mittauksiin. Lasten iät vaihtelivat välillä 6 v 8 kk - 7 v 8 kk. Nuorimman ja vanhimman koulutulokkaan ikäero oli

noin yksi vuosi. Kukin lapsi osallistui neljään haastatteluun lukuunottamatta yhtä lasta, joka yhteensattumien vuoksi osallistui vain kolmeen testiin. Tästä johtuen tulosanalyysit tullaan suorittamaan kolmenkymmenenviiden kaikkiin testeihin osallistuneiden lasten osalta eli N = 35. Testit esitettiin vakiojärjestyksessä: lukujonotaidot - aritmeettiset kyvyt - informaation käsittelykapasiteetti - esinumeeriset toiminnot ja mittauskyvyt.

Yhden haastattelun kestoaika vaihteli osaamistasosta ja testistä riippuen 35 minuutista 45 minuuttiin. Kaikkein eniten veivät aikaa lukujono- ja laskutaitojen testit. Motivaation säilyttämiseksi ja väsymyksen välttämiseksi kussakin testissä oli "pikkuvälitunteja". Näillä tauoilla lapset saivat rentoutua ja kerätä voimia testin seuraavaa osaa varten. Lapset olivat yleisesti ottaen kovin motivoituneita osallistumaan mittauksiin. Tätä kuvaa usein esitetty kysymys "Milloin pääsen seuraavaan testiin?". Yleisenä huomiona kannattaa mainita, että tämänikäiset lapset eivät pyrkineet arvailemaan. Jos lapsi oli epävarma tai tehtävä ylitti hänen suoritustasonsa, hän ei vastannut tai siirsi keskustelun muihin asioihin. Jos lapsi luuli tietävänsä, tuli vastaus yleensä heti (vrt. Keranto 1981, ss. 124 - 125).

Tämän työn tekijä suoritti haastattelut alusta loppuun itse. Haastattelut taltioitiin kaksinkertaisella systeemillä: keskustelun äänitys ja kirjallinen koodaus. Äänityksistä muodostui 29 kasetin (90 min/kasetti) kooste, jota käytettiin kirjallisen koodauksen ohella suoritusprosessin kvantifioinnissa. Suoritusten oikeellisuus määrättiin suoritusprosessin ja produktin perusteella. Tällä tavoin pyrittiin minimoimaan arvailun mahdollisuus. Strategiat määrättiin suoritusprosessista, joka useimmiten oli suoraan nähtävissä. Mikäli lapsi suoritti tehtävän hiljaa päässä, pääteltiin suoritusprosessi käytetyn ajan ja lapsen selostuksen perusteella. Mikäli lapsi sai oikean tuloksen ja ei osannut selostaa miten päätteli eikä hänen toimistaan muutenkaan saatu prosessia esille, johtopäätös tehtiin käytetyn ajan perusteella. Heti annettu vastaus ($t < 5$ s)

vastasi tosiasiatietoa. Hetken miettiminen merkitsi puolipitkää toimintaa ($t < 10$ s) ja pitempiaikainen miettiminen pitkää toimintaa. Edellä esitetty koskee vain eräitä lukujono- ja laskutaito-osioita sekä vain muutamaa lasta 35 lapsesta. Toisin sanoen yleensä suoritusprosessi ja tätä kautta käytetyt strategiat oli selkeästi nähtävissä lapsen ulkoisista toimista.

Muuttujien "oikeellisuus-suoritus" -pisteytys on dikotominen ja yksittäisistä samna osailmiötä mittaavista osioista saadut summamuuttujat välimatka-asteikollisia. Muuttujien strategioihin liittyvä pisteytys perusmuuttujien osalta on ordinaalinen ja summamuuttujat välimatka-asteikollisia. Näihin palataan tarkemmin seuraavissa luvuissa.

Kuten edeltä ilmenee kokeellisen osan mittauksissa käytetyt menetelmät ovat kovin aikaavieviä ja vaativat tutkijalta tarkkaa perehtymistä suoritusprosesseihin ja strategioihin. Muutenkin tämän työn tutkimuskohde on siinä määrin laaja, että suurempaan koehenkilömäärään kuin esitetty ei ollut tässä vaiheessa mahdollisuuksia. On myös mainittavaa, että tässä työssä keskitytään tutkimaan mainittujen osa-alueiden keskinäisiä suorituksellisia ja strategisia suhteita saman koehenkilöjoukon suhteen. Tällöin tutkittavien koehenkilöiden lukumäärän lisäyksellä ei pitäisi olla kovin suuresti luotettavuutta lisäävää vaikutusta. Tähän palataan myöhemmin yksityiskohtaisemmin. Tulokset puhukoon puolestaan.

III A TIEDOLLINEN STRUKTUROITUMINEN JA PIAGET-KYVYT

Piaget'n älyllisen kehityksen tutkimukset ovat kohdistuneet lähinnä loogisen päättelykyvyn ja matemaattisen ongelmanratkaisun alueelle. Tämän työn näkökulmasta keskeisten muistikapasiteetin ja kielellisen oppimisen yhteydet loogiseen päättelykykyyn ja matemaattiseen ongelmanratkaisuun on suurelta osin jäänyt selvittämättä. Tämän ohella Piaget'n ja yleensäkin Geneven koulukunnan kiinnostus on alunperin kohdistunut lähinnä esinumeerisiin toimintoihin sekä näiden sisäistymiseen "henkisiksi" operaatioiksi. Piaget'n mukaan nämä sisäistetyt toiminnot eli operaatiot muodostavat organisoituja systeemejä, joita kutsutaan struktuureiksi. Struktuurin muodostaville operaatioille on ominaista, että ne on käännettävissä joko negaation tai vastavuoroisuuden kautta. Operaatiot eivät koskaan ole erillään toisistaan ja muodostavat hyvin organisoidun systeemin (Beth & Piaget 1966, Brainerd 1978, Flavell 1963, Keranto 1982).

Kognitiiviset struktuurit ovat abstraktioita, jotka viittaavat Piaget'n teoriassa matemaattis-loogiseen muotoon, jonka tietämisen toiminta eli kognitio ottaa jokaisen älyllisen kasvun kehitysasteen aikana. Struktuurien formaalisat mallit on pitkälti lainauksia matematiikasta ja tarkemmin sanottuna abstraktista algebrasta. Tämän ohella on nähtävissä analogia matematiikan strukturalistisen suuntauksen ja Piaget'n strukturalismin välillä. Primitiivisemmistä struktuureista edetään kehittyneempiin aikaisemmat struktuurit sisältäviin rakenteisiin. Erityisen silmiinpistävästi tämä tulee esille lukukäsitteen matemaattisen laajentamisen ja Piaget'n esittämän lukukäsitteen kognitiivisen kehittymisen yhteydessä (Brainerd 1978, 1979, Keranto 1981, 1982, Piaget 1971).

Miten ja miksi struktuurit muodostuvat ja kehittyvät? Piaget'n teoriassa on korostus todellisuuden aktiivisiin muunnoksiin, tulkintaan ja ennakointiin. Kognitiivisen strukturoinnin tehtävänä on itse asiassa, että yksilö selviää yhä paremmin ympäristön informaatiohaasteista ja ongelmista. Piaget itse uskoo

naiivin realisesti, että syntyvät rakenteet ja skeemat ovat todella tiedon hankinnan, järjestämisen ja käytön taustalla (vrt. Beth & Piaget 1966, Brainerd 1978). Struktuurien muodostusta määräävät synnynnäiset organisoitumisen ja adaptaation periaatteet sekä yksilön kokemukset. Se, kuinka hyvin yksilö kykenee assimiloimaan tietoa ympäristön tapahtumista, riippuu senhetkisistä struktuureista ja skeemoista sekä näiden akkommodoituvuudesta. Struktuurien spesifistä tapaa akkommodoitua kutsutaan tasapainottumisprosessiksi. Toisin sanoen, kun saavutetaan raja, jolloin uuden informaation liittäminen olemassa oleviin rakenteisiin ei ole enää mahdollista, ilmaantuu ennemmin tai myöhemmin epätasapaino. Tällöin tarvitaan ja tapahtuu jokin muutos tai kehitys yksilön tiedollisissa rakenteissa. Aikaisemmat rakenteet ja niiden osaskeemat eivät häviä, vaan niistä muodostuu koordinoidumpia ja kehittyneempiä struktuureja. Tällä tavoin systeemi saavuttaa tavoitteita, joihin ei olisi ollut mahdollisuuksia päästä erillisten skeemojen ja rakenteiden avulla. Esimerkiksi laskemisessa yhdistyvät silmän, käden ja lukujen luettelun skeemat yhdistetyksi skeemaksi. Tämä on edellytyksenä lukukäsitteen jatkokehitykselle, jota erillisten skeemojen avulla ei saavuteta.

Skeema voidaankin määritellä sarjana suhteutettuja sisältöjä tai toimintoja, jotka ovat mielessä yhdistetty ja joilla on taipumus aktivoitua kokonaisuutena, jos yhtäkin osaa aktivoidaan. Tässä yhteydessä sisältö viittaa siihen sisäiseen tiedon esitykseen, joka tulee havaittavaksi yksilön käyttäytymisessä ja jota voimme tätä kautta mitata; voidaan kutsua myös älykkyydeksi. Tämän työn kannalta keskeisiä kognitiivisia sisältöjä, joita Piaget on tutkinut, ovat säilyvyyspäätelmät sekä luokittelu- ja relaationaaliset päätelmät. Näistä kognitiivisista sisällöistä on pitkälti mitattu ja päätelty aiemmin esitetyt synnynnäiset funktionaaliset invarianssit ja kognitiiviset struktuurit (vrt. Brainerd 1978).

1. Skeemat ja matemaattinen ongelmanratkaisu

Matemaattista ongelmaa voidaan luonnehtia tilanteena, jossa yksilö tahtoo päästä ratkaisuun, mutta ei ole välittömästi tietoinen, mitkä matemaattisten toimintojen sarjat hänen pitäisi suorittaa päästäkseen alkuehdoista tavoitteeseen (Keranto 1982). On ilmeistä, että ongelmanratkaisun tiedollinen puoli riippuu oleellisesti siitä, millaisia skeemoja ratkaisijalla on aktivoitavissa kullakin hetkellä. Case jakaa tarvittavat skeemat kolmeen luokkaan. Figuratiiviset eli kuvalliset skeemat liittyvät havaintojen tekoon (vrt. Neisser 1967). Operatiiviset skeemat ovat toimintasääntöjen sisäisiä esityksiä ja ovat sovellettavissa figuratiivisiin skeemoihin. Nämä operatiiviset skeemat ovat ilmeisesti hyvin läheistä sukua Piaget'n 'scheme'-käsitteelle ja struktuureille. Piaget on nimittäin pyrkinyt erottelemaan hyvin aktiiviset ja organisaatioon pyrkivät skeemat ('scheme') enemmän tai vähemmän passiivisista skeemoista ('schema'). Viimeksi mainitut skeemat ovat ilmeisesti hyvin läheistä sukua figuratiivisille skeemoille (vrt. Brainerd 1978, Piaget & Inhelder 1969). Kolmas skeemojen luokka on suunnittelevat ja toimeenpanevat skeemat (Case 1974, Klahr & Wallace 1976, Newell & Simon 1972). Nämä ovat Case'n mukaan toimintatavan sisäisiä esityksiä, joita sovelletaan erityisiin ongelmatilanteisiin tarkoituksena saavuttaa erityisiä tavoitteita. Ne ovat suuressa määrin vastuussa siitä, mitä figuratiivisia ja operatiivisia skeemoja subjekti aktivoi kussakin ongelmanratkaisutilanteessa (Case 1974). Suunnittelevat ja toimeenpanevat skeemat vihjaavat saatavilla olevien ongelmanratkaisustrategioiden valikoimaan. Tällä tavoin onkin tultu tiedon käsittelyn eli informaation prosessoinnin ongelmakenttään. Inhimillinen tietojen käsittely sisältää tiedon hankkimisen, tallentamisen, muokkaamisen ja soveltamisen eri tilanteisiin (Leino 1981a, b, 1982a). Tämä lähestymistapa antaa uutta valaistusta yksilön ongelmanratkaisukäyttäytymiseen. Yksilön ongelmanratkaisua pyritään kuvailemaan ja selittämään niiden osatoimintojen termein, joita tarvitaan tehtävän suorituksessa. Toisin sanoen enää ei pyritä analysoimaan yksilön matemaattis-loogista ongelmanratkaisua yksinomaan ongelman

loogisten tai algebrallisten ominaisuuksien termein. Lähestymistapana on analysoida myös tehtävän informaatioprosessointivaatimuksia, joihin palataan seuraavassa luvussa (Baylor et al 1973, Carpenter 1976, Case 1972, 1974, 1980a, b, Klahr & Wallace 1976, Newell & Simon 1972, Pascual-Leone 1970). Informaation prosessoinnin kannalta keskeisiksi muodostuvat strategioiden käyttöön liittyvät kysymykset. Strategioilla tarkoitetaan tässä työssä ongelmanratkaisuprosesseja valikoivia, ohjailevia ja kontrolloivia henkisiä toimintoja (vrt. Bruner et al 1956, Leino 1982a, 1982b).

Mitä sitten tapahtuu kun yksilö ratkoo matemaattisia ongelmia? Skeemojen aktivoimisen näkökulmasta ajatteluprosessi saattaisi näyttää seuraavalta (vrt. Case 1974). Yritys ratkaista ongelma aktivoi jonkin yleisen toimeenpanevan skeeman. Se mikä skeema aktivoituu riippuu Case'n mukaan ongelman luonteesta, havaintokentän luonteesta, aikaisemmista kokemuksista ja affektiivisista tekijöistä. Toimeenpaneva skeema suuntaa figuratiivisten ja operatiivisten skeemojen aktivaation. Seuraavaksi operatiiviset ja figuratiiviset skeemat pannaan toimeen. Jos tapahtuu niin, että kaksi skeemaa aktivoituu ja niiden sisältö on ristiriidassa keskenään, joutuu systeemi epätasapainoon. Tällä tavoin tullaan takaisin Piaget'n teorian strukturalisoitumisen ideaan!

2. Kognitiiviset asteet ja sisällöt

Piaget'n kognitiiviset kehitysasteet on lujasti sidottu skeeman ja struktuurin ideoihin sekä näiden kehitykseen. Asteen idea on apuväline ryhmiteltäessä yhteen kvalitatiiviset muutokset skeemoissa (Brainerd 1978, Flavell 1963, Piaget 1960). Ensimmäisellä asteella lapsen skeemat ovat ulkoisia motorisia toimintakaavoja. Toisella asteella ulkoiset skeemat tulevat ensikertaa henkisiksi. Tästä huolimatta skeemat ovat erillään toisistaan ja ristiriitoja pääsee helposti syntymään. Operationaalista tasoa ei ole saavutettu. Tästä nimi esioperationaalinen aste. Kolmas ja neljäs aste ovat operationaalisen toiminnon asteita. Matemaattis-loogisten sisältöjen toiminnoista sisäistyneet skeemat ovat saavuttaneet struktuurin asteen.

Täten Piaget'n teoriassa kaikki struktuurit ovat skeemoja mutta ei kääntäen.

Mitkä ovat sitten kriteerit sille, että jokin aste on saavutettu? Brainerd on koonnut tutkimuksista neljä yhteistä ja oleellista kriteeriä:

a) kvalitatiivinen muutos kognitiivisissa sisällöissä
b) kulttuurista riippumatta jokainen aste saavutetaan täsmälleen samassa järjestyksessä
c) edeltävien asteiden kognitiiviset skeemat sisältyvät käsillä olevan asteen kognitiivisiin skeemoihin
d) skeemojen kaikkinainen integraatio

Vaatimus a) ilmoittaa, että jokaisella asteella tulee olemaan kvalitatiivisesti erilaiset skeemat. Esimerkiksi tämän työn näkökulmasta tärkeän transitiivipäättelyn suhteen tapahtuu laadullinen muutos siirryttäessä toiselta asteelta kolmannelle asteelle. Lapsen ei tarvitse kolmannella asteella suoraan verrata objektien A ja B kvantitatiivista suhdetta, kun on näytetty suhteet A R B ja B R C (R =, < tai >). Hän päättelee suoraan, että A R C. Palaan näihin kysymyksiin yksityiskohtaisemmin edempänä.

Vaatimus b) ilmoittaa, että asteet seuraavat toisiaan vakiojärjestyksessä eikä sitä missä spesifissä iässä tämä tapahtuu. Piaget'n mukaan asteiden ilmaantuminen voi vaihdella suurestikin riippuen kypsymis- ja ympäristötekijöistä.

Kolmas vaatimus c) ilmoittaa tarkemmin kohdan b) vaatimuksen. Tämän hierarkisoitumisperiaatteen mukaan primitiivisemmät skeemat muodostavat perustan, jolle kehittyneemmät skeemat rakentuvat. Tässähän oli selvä analogia matematiikan puolelle kuten aikaisemmin todettiin.

Neljäs vaatimus d) määrää, että tiettyä astetta luonnehtivat skeemat täytyy lujittaa yhtenäiseksi kokonaisuudeksi ennen kuin voidaan puhua uudesta asteesta. Brainerdin mukaan tämä merkitsee empiirisesti seuraavaa. Jos tutkimme Piaget'n tietyn asteen kognitiivisia sisältöjä ei niihin liittyvien kykyjen pitäisi ilmaantua missään kiinteässä jonossa (Brainerd 1978). Tästä tarkemmin seuraavassa.

3. Piaget-kyvyt ja siirtymän idea

Kyvyllä tarkoitetaan tässä työssä tietyn matemaattisen*)tai kognitiivisen sisällön ja siinä havaittavan ratkaisuprosessin yhdelmää. Kyky viittaa lapsen henkiseen ominaisuuteen, joka kehittyy ja on tietyssä määrin kehitettävissä (vrt. Keranto 1981, Klausmeir & Goodwin 1969, Leino 1977, 1978). Piaget-kyvyt viittaavat tässä työssä pikemmin tiettyjen kognitiivisten sisältöjen yhteydessä havaittaviin prosesseihin kuin Piaget'n ryhmityksiin. Toisin sanoen valitsemassani lähestymistavassa pyritään tarkastelemaan Piaget'n tutkimia esinumeerisia ja esimittauksellisia operaatioita informaation prosessoinnin näkökulmasta. On nimittäin nähtävissä, kuten jo johdannossa lyhyesti totesin, että Piaget'n strukturalismi on liian karkea tapa kuvailla lapsen matemaattis-loogisen ajattelun kehityksen yksityiskohtia. Palaan tähän kysymykseen vielä monta kertaa tässä työssä.

Oletetaan, että esitämme lapselle suuren määrän johonkin kognitiiviseen sisältöön liittyviä aiheeltaan ja ulkoiselta esitysasultaan vaihtelevia tehtäviä. Ratkaisujen oikeellisuuden kannalta on periaatteessa kolme mahdollisuutta. Lapsi ei osaa yhtään tehtävää tai onnistuu ratkaisemaan osan tehtävistä tai ratkaisee kaikki tehtävät. Piaget'n teorian näkökulmasta lapsi, joka ratkaisee kaikki tehtävät tiettyjen kriteerien vallitsessa on saavuttanut hankkimisfaasin. Lapsi, joka vastaa oikein osaan tehtävistä, on valmistelevassa fassissa. Lapsi, joka ei osaa yhtään tehtävää, on aivan eri asteella kuin hankkimisfaasin saavuttanut lapsi. Edellä oleva merkitsee, että Piaget'n teoriassa jokainen aste sisältää toisaalta hankittujen skeemojen laajentamisen ja lujittamisen sekä toisaalta laadullisesti korkeampien käyttäytymismuotojen valmistelun. Toisin sanoen tietyn kehitysasteen sisältöjä ja täten kehitysastetta ei voi saavuttaa heti siltään. On aina olemassa valmisteleva faasi (Brainerd 1978, Flavell 1963, Piaget 1941, Steiner 1973).

Hankittujen skeemojen laajentamiseen ja lujittamiseen liittyy tiiviisti ongelmallinen siirtymän idea (Aebli 1963, Brainerd 1978, Flavell 1963, Piaget 1941, 1956, Steiner 1973). Siirtymällä tarkoitetaan yleisesti mitä tahansa invarianttia jonoa kognitiivisten sisältöjen (tai niiden versioiden) välillä

*)Matemattinen sisältö viittaa tässä työssä matemaattisiin aiheisiin (aritmetiikka, geometria) sekä näiden aiheiden spesifeihin ongelmatyyppeihin.

siten, että yksi sisältö ilmenee lapsen kehityksessä aina ennen toista sisältöä (tai versio ennen toista versiota) (vrt. Brainerd 1978, s. 36). Siirtymät ilmenevät kahdella tavalla: a) Tietyn asteen kognitiivisen sisällön kahden tai useamman version väliset ajallisesti invariantit jonot, b) kahden eri asteen kognitiivisten sisältöjen ajallisesti invariantit jonot. Edellisiä kutsutaan 'horisontaali-siirtymiksi' ja jälkimmäisiä 'vertikaali-siirtymiksi'. Edelliset viittaavat siis tietyn asteen sisällä hyväksyttäviin siirtymiin ja jälkimmäiset asteelta toiselle liittyviin siirtymiin. Tästä nimi vertikaalinen.

Horisontaali-siirtymistä on lukuisia esimerkkejä. Todetun primitiivivastaavuuden säilytyskyky edeltää vastaavaa pituuden säilytyskykyä (esim. Inhelder 1972, Inhelder & Sinclair 1969). Samaten on todettu seuraava jono: primitiivivastaavuuden säilyvyys → nesteen säilyvyys → painon säilyvyys → tilavuuden säilyvyys (esim. Brainerd & Brainerd 1972, Piaget & Inhelder 1941, Uzgiris 1964). Mistä nämä siirtymät johtuvat? Mielestäni asteen sisäiset siirtymät ovat selvä merkki siitä, että lapsen ajattelu on suuresti sisältöön sidottua. Jos tarkastellaan ongelmanratkaisutilannetta painotetusti matemaattis-loogisten rakenteiden näkökulmasta piilee tässä vaara. Tästä näkökulmasta nähtynä jatkuvien ja epäjatkuvien suureiden primitiiviset vertailut ja näihin liittyvät säilyvyydet ovat rakenteellisesti samanlaisia. Periaatteessa kyseiset tehtävät voidaan ratkaista mikäli tajutaan käänteisyyden idea! Näin ei kuitenkaan näytä tapahtuvan, kuten siirtymät osoittavat. Toisin sanoen on ilmeistä, että lukukäsitteen ja mittauksen ideaan liittyvät primitiiviset toiminnot sekä käänteisyyden idea eivät ole riittäviä selittämään kyseistä ilmiötä. Tarvitaan uudentyyppistä näkökulmaa, jossa tilannetta tarkastellaan matematiikan ja informaation prosessoinnin näkökulmasta. Palaan tähän kysymykseen yksityiskohtaisemmin jo seuraavassa kappaleessa.

Piaget'n systeemissä kuvatunlaiset siirtymät ovat siis "sallittuja". Toisaalta Piaget'n teoriassa ei saisi ilmetä seuraavanlaista tilannetta (vrt. Brainerd 1978, Flavell 1963). Tietyn asteen kahden eri sisällön välillä havaitaan invariantit jonot.

Esimerkiksi on todisteita seuraavasta jonosta: konkreetit transitiivipäätelmät → primitiivivastaavuuden säilyvyys → luokkien traditionaalinen inkluusio (Brainerd 1973, 1974, Brainerd & Fraser 1974, Keranto 1981, Winer & Kronberg 1974). Tämä aiheuttaa komplikaatioita Piaget'n teoriaan. Koetulokset ovat vastoin jokaisen asteen struktuurien "kaikkinaisen integroitumisen" periaatetta (structures d'ensemble). Toisin sanoen konkreettisen transitiivipäättelyn pitäisi kuulua eri asteelle kuin Piaget on esittänyt. Brainerd toteaakin, että kyseinen päättelyn muoto on pikemmin esioperationaalinen sisältö kuin operationaalinen (Brainerd 1978, s. 178). Toisaalta luokkien inkluusiotehtävät traditionaalisessa muodossa ovat osoittautuneet kovin vaikeiksi (esim. Brainerd 1979, Keranto 1979, 1981). Brainerd esittääkin sen olevan pikemmin formaalisten kuin konkreettisten operaatioiden vaiheen sisältö (Brainerd 1978, s. 183). Tähän liittyy kuitenkin siinä määrin mittausteknisiä ongelmia, että asiaan on syytä palata tuonnempana tässä työssä.

4. Kvantitatiivinen vertailu

Tämän työn ja matematiikan näkökulmasta on järkevää jakaa kvantitatiiviset vertailut kahteen luokkaan:

a) diskreettien objektijoukkojen kvantitatiiviset vertailut,
b) jatkuvien (tai yhtenäisten) objektien kvantitatiiviset vertailut.

Informaation prosessoinnin näkökulmasta on aikuisella kolme keskeistä tuotetta tai skeemaa, jotka hallitsevat kyseisiä vertailuja (vrt. Klahr & Wallace 1976).

$x_i \; R_s y_i \Leftrightarrow X \; R_q \; Y$, missä R_s on jostain kvantitatiivisesta operaatiosta (esim. laskeminen) saatujen symbolien x_i ja y_i ($i=1$) välinen relaatio; R_s voi olla $<$, $>$ tai $=$. Vastaavasti R_q ilmoittaa vastaavan relaation $<$, $>$ tai $=$ esisymbolisella tasolla objektijoukoille tai vertailtaville objekteille X ja Y. Nämä tuotokset ovat yhdysside kahden tyyppisen tiedon välillä, joita periaatteessa voidaan tarkastella erillisinä. Esimerkiksi laskemalla saatu tieto $x_1 = y_1$ (nyt $i = 1$ ja R_s sama kuin '='), on lukujonon 1,2,3,... järjestykseen liittyvää sisäistä tietoa.

Toisen tyypin tieto koskee taas kvantitatiivista relaatiota havaittavissa olevien objektijoukkojen tai suureiden maailmassa. Lapsen ongelmana on yhdistää tai löytää yhdysside näiden "maailmojen" välillä! Oletetaan, että lapsi laskee kaksi objektijoukkoa ja löytää saamiensa viimeisten lukusanojen välille esimerkiksi relaation $x_1 = y_1$. Kysymys kuuluu: osaako lapsi päätellä tästä relaatiosta vertailtavien kvantiteettien suuruussuhteen? Entä kääntäen? Jos näytämme lapselle esimerkiksi primitiivisen vastaavuuden avulla, että vertailtavia objekteja on yhtämonta, niin ymmärtääkö lapsi yhteyden toiseen suuntaan!

Aikaisempien tutkimusten perusteella voidaan sanoa, että lapset kykenevät jo varsin aikaisessa vaiheessa käyttämään lukusanoja joukkojen ekvivalenssin ja inekvivalenssin toteamisessa ja muodostamisessa (esim. Gelman & Gallistel 1978, Keranto 1979, 1981). Toisaalta on todettu, että primitiivisen yksi-yksi-vastaavuuden käyttö objektijoukkojen ekvivalenssien ja inekvivalenssien toteamisessa ja muodostamisessa suuremmilla lukumäärillä kuin 6 on ongelmallista (Brainerd 1979, Gelman & Gallistel 1978, Keranto 1981).

Informaation prosessoinnin näkökulmasta mainituille havainnoille on olemassa selitys (Klahr & Wallace 1976). Tämän näkökulman mukaan primitiivisen vastaavuuden käyttö ulkoisten joukkojen suhteellisten lukumäärien määrityksessä on korkean tason strategia! Laskemiseen nojautuva vertailu on yksinkertaisempi sisäinen "matalan tason" prosessi, jossa loppuvaiheessa määrätään kahden symbolin suhteellinen suuruus. Erityisesti tämä nähdäkseni koskee random-muotoisessa tilassa olevia objektijoukkoja (Keranto 1981). Jos objektijoukot on järjestetty valmiiksi jonoon kuten monissa Piaget'n kokeissa, primitiivisen vastaavuuden käyttö lienee ekonomisempi ja helpommin huomattava menetelmä. Täten saattaa selittyä eroavuudet objektien kvantitatiivisessa vertailussa havaituissa strategioissa. Käytettyyn vertailumenetelmään vaikuttaa myös oppiminen, kuten tulemme kokeellisessa osassa näkemään.

Miten sitten jatkuvien suureiden vertailu tapahtuu ja mitä ongelmia siihen liittyy lapsen näkökulmasta? Jos pysyttelemme esimittauksellisten operaatioiden "maailmassa", on tilanne rakenteellisesti samankaltainen diskreettien objektijoukkojen ulkoisen vertailun kanssa. Toisin sanoen voimme pituuksien vertailussa käyttää periaatteessa samaa menetelmää kuin diskreettien objektijoukkojen tapauksessa. Asetamme vertailtavat "pätkät" vierekkäin ja katsomme, ovatko ne yhtä pitkiä vai onko toinen pidempi kuin toinen. Entä jos kysymmekin, kuinka paljon toinen on pidempi kuin toinen! Mikäli kysymys viittaa esimerkiksi johonkin standardimittaan, niin tilanteesta ei selvitä enää "pelkästään osoittelemalla". Tarvitaan mittayksikön hallintaa ja tällöin asetelmat muuttuvat. Tehtävästä tulee merkittävästi vaikeampi kuin vastaavasta diskreetteihin objekteihin liittyvästä tehtävästä. Tästä näkökulmasta voidaan selittää monen vuoden viive lukumäärän ja pituuksien säilyvyyksien välillä. Samalla nähdään ne vaarat, mitkä piilevät siinä, kun tutkitaan esinumeerisia ja esimittauksellisia toimintoja erillään lukusanojen käytöstä. Lukija ymmärtänee nyt, miksi alussa erottelin diskreettien objektien vertailut jatkuvien objektien vertailusta.

5. Kvantiteetin säilyvyys

Matemaattis-loogisen ajattelun kehityksen näkökulmasta säilyvyydet viittaavat ymmärrykseen, että todettu kvantitatiivinen suhde kahden objektin välillä jää invariantiksi, kun toiseen objekteista kohdistetaan irrelevantteja havaintomuunnoksia. Matemaattisesti esitettynä on tilanne seuraava (vrt. Keranto 1982, Klahr & Wallace 1976). Tarkoittakoon T_p havaintotransformaatiota ja $T^{\pm}$ lisäävää tai vähentävää transformaatiota, joille on voimassa $T^{\pm} \cap T_p = \emptyset$. Lisäksi merkitään kvantiteetin X transformaatiota $T(X) \rightarrow X'$ ja kvantiteettiin X liittyvää symbolituotosta $q_i(X) \rightarrow x_i$. Tässä symboli q_i viittaa johonkin kvantifioivaan operaattoriin (esim. laskeminen ;i=1). Säilyvyydet on syytä jakaa kahteen kategoriaan: identiteetin säilyvyydet (IC) ja ekvivalenssin säilyvyydet (EC). Tarkastellaan ensin

ekvivalenssin säilyvyyteen liittyviä ongelmia. Informaation prosessoinnin näkökulmasta tilanteeseen liittyy vertailun X = Y kolme jatkotuotosta:

$(X=Y)(T_p(Y) \rightarrow Y') \longrightarrow (X = Y')$

$(X=Y)(T^{\pm}(Y) \rightarrow Y') \longrightarrow (X \lessgtr Y')$

Kun lapsi oppii erottelemaan nämä kolme tuotosta tai skeemaa toisistaan ja integroi ne, on hänellä mahdollisuus välttää turhaa prosessointia. Käytännössä tämä merkitsee sitä, että lapsi oppii ymmärtämään, että jos mitään ei ole lisätty tai vähennetty todettu kvantitatiivinen relaatio ei muutu eli säilyy.

Identiteetin säilyvyyden lähtötilanteessa on vain yksi tarkasteltava joukko tai objekti X. Tähän säilyvyyteen liittyy myös kolme tuotosta:

$(X)\ (T_p(X) \rightarrow X') \longrightarrow (X = X')$

$(X)\ (T^{\pm}(X) \rightarrow X') \longrightarrow (X \lessgtr X')$

Prosessointiekonomian periaatteen nojalla lapsella on pyrkimys tässäkin löytää kyseiset tuotokset. Tämä tapahtuu lyhyesti kuvailtuna seuraavasti (Klahr & Wallace 1976, ss. 111 - 115). Leikkiessään lapsi järjestelee monella tavalla jotain diskreettiä objektijoukkoa. Nämä tilanteet koodautuvat pitkäaikaiseen muistiin muodossa (alkutila) — (transformaatio) — (lopputila). On tärkeää huomauttaa, että tämä tapahtuu pienten yhdellä silmäyksellä havaittavien lukumäärien alueella (korvaamisoperaattori q_s ; substitutio $q_s(X) < 6$). Syntyy siis seuraavia spesifejä jonoja: $q_s(A)=a_s \ldots (T_{p,\pm}(A) \rightarrow A') \ldots q_s(A')=a_s'$. Lapsi havaitsee, että jotkin transformaatiot aiheuttavat vakioisesti tilanteen $a_s < a_s'$ tai $a_s > a_s'$ ja jotkin tilanteen $a_s = a_s'$. Nämä erityiset konsistentit jonot luokitellaan jatkossa kolmeksi yleiseksi konsistentiksi jonoksi:

$(x_s) \ldots (T_{p,\pm}(X) \rightarrow X') \ldots (x_s' =, \lessgtr x_s)$.

Tässä vaiheessa transformaatiot $T_{p,\pm}$ liitetään alku- ja lopputilan symbolien x_s ja x_s' suhteisiin. Täten itse transformaatiot tulevat lapsen tietoisuuteen, joko kvantiteetin säilyttävinä (T_p) tai kvantiteetin muuttavana ($T\pm$). Seuraava vaihe on se, että huomataan X':n kvantifikaatio ja sitä seuraava kvantitatiivinen vertailu tarpeettomaksi. Lapsi on hankkinut ennakoivien skeemojen tai tuotosten systeemin:

$(x_s)(T_{p,\pm}(X) \rightarrow X') \longrightarrow (x_s' =, \lessgtr x_s)$.

On ristiriitaista tietoa siitä, missä vaiheessa korvaaminen on ylipäänsä mahdollista. Esimerkiksi Gelmanin ja Bryantin työt viittaavat siihen, että korvaaminen tapahtuu vasta kun lapsi osaa laskea vastaavat lukumäärät (Bryant 1972, Gelman 1972, Keranto 1981). Toisaalta Gelmanin työt tukevat ajatusta, että lapsi hankkii transformaatiosäännöt hyvin varhain IC-tapauksessa (Gelman 1972, Gelman & Tucker 1975). Mitä tulee EC-transformaatioihin, hankitaan ne ilmeisesti myöhemmin kuin vastaavat IC-transformaatiot diskreettien objektien tapauksessa (Elkind & Schoenfeld 1972). Tämä olisi sikäli ymmärrettävää, että EC-tuotossäännöt ovat yksilöllisesti kompleksisempia kuin IC-säännöt; (x_s, y_s, y_s') versus (x_s, x_s'). Edelleen IC-tapauksessa ei ole laajennuksia inekvivalenssin sääntöjen omaksumisen suuntaan kuten on EC-tapauksessa. Jos tarkastellaan tilannetta loogisen analyysin näkökulmasta, niin periaatteessa on mahdollista siirtyä IC-tilanteesta EC-tilanteeseen seuraavasti: Olkoon esim. EC-tilanne $(x_i=y_i)(T_p(Y)\rightarrow Y')\text{-}\rightarrow(x_i=y_i')$. Tähän tuotokseen päästään soveltamalla ensin IC-tuotosta $(y_i)(T_p(Y)\rightarrow Y')\text{-}\rightarrow(y_i' = y_i)$ ja sitten transitiivipäätelmää $(x_i=y_i)$ ja $(y_i=y_i') \Rightarrow (x_i=y_i')$. Empiirisestä näkökulmasta tämä edellyttäisi lapselta transitiivipäätelmän hallintaa, mihin tulen seuraavassa kappaleessa. Vaikuttaisi siis siltä, että IC-kyvyt tulisivat ennen EC-kykyjä. Tästä on kuitenkin kokeellisesti ristiriitaista tietoa (esim. Moynahan & Glick 1972, Northman & Gruen 1970).

Miten sitten IC- ja EC-säilyvyyssäännöt yleistetään korvaamisalueen ulkopuolelle? Klahr & Wallacen mukaan tämä tapahtuu diskreettien objektien tapauksessa laskemisoperaation välityksellä. Aluksi korvaamis- ja laskemisoperaatioita sovelletaan samoihin joukkoihin. Tämän jälkeen saavutetut ja koordinoidut skeemat pyrkivät yleistymään kaikkiin laskemisalueen tapauksiin. Todellisen ongelman lapsen näkökulmasta muodostavat ne alueet, joihin laskemiskyky ei ulotu sekä jatkuvat objektit. Mikäli lapsella ei ole pätevää kvantitatiivista operaattoria käytössään, joutuu hän turvautumaan arviointiin. Tällainen tilanne on juuri monissa Piaget-testeissä (Piaget 1952, Piaget & Inhelder & Szeminska 1960). Jatkuvien suureiden alueella ilmiöiden vaihtelevuus on selvästi suurempi kuin pienten epäjatkuvien joukkojen

tapauksessa. Toisaalta lapsen täytyy ottaa huomioon kvantiteetin kaksi dimensiota. Oletettavasti nämä kaksinkertaiset kvantifikaatiot on koordinoitava (esim. Halford 1970, Beth & Piaget 1966, Piaget 1952). Tämän koordinaation perusteella on vasta mahdollisuus keksiä säännöllisyydet ja oppia säilyttämään jatkuva kvantiteetti.

Monet kokeelliset tutkimukset tukevat esitettyä. Jatkuvien ja estimointialueen epäjatkuvien kvantiteettien säilyvyydet ilmaantuvat selvästi myöhemmin kuin korvaamis- ja laskemisalueen kvantiteettien säilyvyydet. On havaittu itse asiassa, että jatkuvien ja estimointialueen epäjatkuvien kvantiteettien säilyvyystehtävissä lapset keskittyvät aluksi vain yhteen dimensioon. Esimerkiksi vertailtavien jonojen tai janojen päät muodostavat vertailukohteen. On selvää, että tällaiset yksidimensionaaliset vertailut johtavat helposti ristiriitoihin. Tämän ohella lapsen on ilmeisesti mahdoton keksiä päteviä transformaatiosääntöjä. Empiiristen säännöllisyyksien löytämiseksi systeemin on siis suuntauduttava kaksidimensionaaliseen vertailuun ja kompensaation tajuamiseen kahden dimension muutosten välillä (esim. Brainerd 1978, Gelman 1972, Halford 1970, 1975, 1978, 1980, Inhelder & Sinclair 1969, Piaget 1952). On opetustutkimuksia, jotka itse asiassa osoittavat, että säilyvyys voidaan saavuttaa kiinnittämällä lapsen huomio kompensaatioon tai palautettavuuteen (inversio harjoitus). Samoin on todettu, että sekä kompensaation tajuaminen että inversiopäättely edeltävät säilyvyyden saavuttamista. Tältä osin viittaan Brainerdin teokseen (Brainerd 1978, ss. 172 - 176). Siitä tuleeko identiteetin säilyvyys ennen ekvivalenssin säilyvyyttä jatkuvien suureiden tapauksessa ollaan erimielisiä (esim. Brainerd & Hooper 1975, Elkind 1967, Koshinsky & Hall 1973, Piaget 1952).

Yleisenä johtopäätöksenä suoritetuista säilyvyystutkimuksista voidaan esittää seuraava jono: kompensaation ja inversion tajuaminen → epäjatkuvien kvantiteettien identiteetin säilyvyys → epäjatkuvien suureiden ekvivalenssin säilyvyys → jatkuvien suureiden identiteetin säilyvyys → jatkuvien suureiden ekvivalenssin säilyvyys.

6. Transitiivi- ja substituutio-päätelmät

Informaation prosessoinnin ja matematiikan näkökulmasta on lapsen saavutettava kolme tuotosryhmää, jotta hän kykenee selviytymään transitiivipäätelmistä kvantitatiivisten tehtävien yhteydessä:

A. $(X\ R_q\ Y)$ ja $(Y\ R_q\ Z) \Rightarrow (X\ R_q\ Z)$, missä $R_q <, >$ tai $=$ ilmoittaa kvantitatiivisen suhteen objekteille X,Y,Z.

Kun tämä ensimmäinen ryhmä on saavutettu, lapsi ei tarvitse objektien X ja Z suoraa vertailua määrätäkseen niiden keskinäisen kvantitatiivisen suhteen. Hän on tältä osin konkreettisten operaatioiden tasolla. Mikäli odotetaan, että lapsi selviää esimerkiksi tehtävästä $(X = Y)$ ja $(Z = Y)$ joten $X = Z$, tarvitaan toista tuotosryhmää.

B. $(X\ R_q\ Y) \Rightarrow (Y\ R_q^-\ X)$, missä R_q on $<, >$ tai $=$ sekä R_q^- vastaavasti $>, <$ tai $=$. Tätä tuotosryhmää tarvitaan siis, kun A. ryhmän premissit eivät ole vielä sopivasti asetettuja. Klahr ja Wallace esittävät, että sarjan muodostusta varten tarvitaan vielä kolmas tuotosryhmä (Klahr & Wallace 1976, s. 155):

C. $(X\ R_q\ Y)$ ja $(Y\ R_q\ Z)$ ja $(X\ R_q\ Z) \Rightarrow (X\ R_q\ Y\ R_q\ Z)$; $R_q <, >$ tai $=$.

Piaget'n mukaan edellä oleva sarjoittaminen on edellytys transitiivikehitykselle. Toisin sanoen lapsen on ymmärrettävä, että objekti voi olla samaan aikaan lyhyempi kuin toinen objekti ja pidempi kuin toinen objekti. Itse asiassa tähän sisältyy käänteisyyden ajatus, joka on kuvattu tuotosryhmällä B. (Piaget 1952, Piaget et al 1960). Prosessoinnin näkökulmasta on perushypoteesina (vrt. säilyvyys), että transitiiviprosessointi on perustettu tapahtumien spesifien (sisällöstä riippuvia) kokemiseen ja varastointiin pitkäaikaiseen muistiin (Klahr & Wallace 1976, ss. 159 - 171). On järkevää, että systeemi ei ole kokonaan riippuvainen suorasta havainnosta ympäristön kanssa määrittäessään tapahtumien jonoja. Tästä seuraa, että systeemillä pitäisi olla tuotossysteemejä, jotka aktivoidaan tarvittaessa. Täten välttämättömistä spesifeistä jonoista päädytään yleisten konsistenttien jonojen kautta sääntöihin tai skeemoihin A. - C.

On tärkeää todeta, että suurin osa kokeellisista transitiivipäättelyn kehityksen mittauksista on suoritettu jatkuvien suureiden yhteydessä. Toisin sanoen on kovin vaikea sanoa, miten jatkuvien suureiden yhteydessä tutkitut konkreettiset transitiivipäätelmät liittyvät laskemistoimintoihin ja korvaamiseen. Samoin on ongelma, miten transitiivipäätelmät ovat yhteydessä säilyvyyspäätelmiin diskreettien objektien tapauksessa. Tämän ohella on väittelyä transitiivipäätelmien hyväksyttävyyskriteereistä. Esimerkiksi Piaget vaatii, että lasten on osattava selittää transitiivipäätelmään liittyvä prosessi pätevästi. Vasta tällöin lapsen katsotaan olevan operationaalisella tasolla tämän kyvyn osalta. Tämän ohella Piaget-tyyppisissä kokeissa on havaintonarhoja, jotka lapsen täytyy päätelmän ohella voittaa (esim. Braine 1962, Brainerd 1978, 1979, Keranto 1981, Piaget et al 1960, Smedslund 1963). Jos mainitut tekijät, kuten myös muistirasitukset eliminoidaan, saavutetaan tuloksia, jotka ovat monia vuosia Piaget'n ilmoittamaan keskimääräistä transitiivipäätelmän saavuttamisaikaa (n. 7 v.) edellä (esim. Brainerd 1973, 1974, Bryant 1974, Bryant & Trabasso 1971, Keranto 1981, Siegel 1971).

Mikä on sitten säilyvyyksien ja transitiivipäätelmien looginen ja kehityksellinen suhde? Edellyttävätkö transitiivipäätelmät säilyvyyttä ja kääntäen? Piaget sitoo nämä kognitiiviset sisällöt toisiinsa. Pätevien transitiivipäätelmien edellytyksenä on, että "mittakeppi" pysyy invarianttina lapsen mielessä (Piaget 1952, Piaget et al 1960). On tietysti ymmärrettävää, että jos transitiivipäätelmissä käytetty mittausinstrumentti ei pysy vakiona, niin säilyvyysongelmat tulevat esille. Tämä koskee ilmeisesti diskreettien objektijoukkojen vertailuja pikemmin kuin jatkuvien objektien vertailua. Useimmat transitiivipäätelmät liittyvät ilmeisemmin jatkuvien suureiden vertailuihin. Näissä vertailuissa välittävään mittainstrumenttiin kohdistuu harvemmin havainto- tai lisäys-vähennystransformaatioita. Tässä tapauksessa voisi ajatella, että transitiivipäätelmät voidaan saavuttaa ilman edellä tarkasteltuja säilyvyyskykyjä juuri jatkuvien suureiden vertailun suunnasta. Itse asiassa viimeaikaisimmat tutkimukset viittaavat juuri tähän suuntaan. Transitiivipäätelmät jatkuvien suureiden yhteydessä edeltävät säilyvyyspäätelmiä (esim. Brainerd 1974, Brainerd & Fraser 1975, Keranto 1981, Winer & Kronberg 1974). Näyttää siis ilmeiseltä, että

ainakaan tietyt transitiivipäätelmät eivät edellytä säilyvyyttä. Käänteisesti ajatellen ei ole ilmeisesti välttämätöntä, että lapsi tarvitsee transitiivipäätelmää ainakaan IC-tapauksessa. Toisaalta EC-sääntöihin voidaan loogisesti päätyä IC-sääntöjen ja transitiivisääntöjen avulla. Kokeellisesti tästä ei ole näyttöä.

Oletetaan, että lapselle on annettu tehtävä, jossa tietty palikoiden joukko on jaettava osaryhmiin 'yhtäpitkä kuin' relaation mukaan. Matemaattisesti tässä on kysymys ekvivalenssiluokkiin jaosta. Oletetaan nyt, että lapsi on löytänyt jo kolme palikkaa siten, että A=B=C mainitun ekvivalenssirelaation mielessä. Periaatteessa voidaan valita mikä tahansa kyseisistä palikoista A,B,C edustamaan tätä ekvivalenssiluokkaa. Tätä ideaa kutsutaan tässä edustaja- tai substituutioperiaatteeksi (vrt. Steffe 1971). Tähän substituutioperiaatteeseen sisältyy ajatus relaatioiden yhdistelymahdollisuudesta. Jos lapsi löytää, että edustaja A on lyhyempi tai pidempi kuin uusi vertailtava objekti D, niin myös muilla kyseisen luokan objekteilla on sama ominaisuus. Matemaattisesti merkittynä:

D. (X = Y) ja (Y R Z) = (X R Z), missä R on $<$ tai $>$.

Kuten edeltä ilmenee substituutiopäätelmä on kovin läheisessä yhteydessä transitiivipäätelmiin. Täten olisi ennakoitavissa, että kyseiset päätelmät ilmenevät suurinpiirtein samaan aikaan lapsen kehityksessä. Tästä lähemmin kokeellisessa osassa.

7. Luokkien inkluusiopäätelmät

Inkluusiopäätelmä viittaa lapsen kykyyn ymmärtää, että luokka on osaluokkaansa "mahtavampi". Tässä ei siis ole kysymys jonkin luokan osaluokkien keskinäisestä kvantitatiivisesta vertailusta vaan luokan ja siihen sisältyvän osaluokan kvantitatiivisesta vertailusta. Piaget pitää tätä kykyä yhdessä säilyvyyksien ja relationaalisten päätelmien ohella operationaalisen ajattelun kulmakivenä (Inhelder & Piaget 1964, Piaget 1952, Piaget & Inhelder 1969).

Piaget'n esittämät inkluusiopäätelmien mittaamiseksi tarkoitetut testit ovat kovin ongelmallisia niin sisältövaliditeetin kuin lapsen suoritusprosessin näkökulmasta. Lapselle esitetään esimerkiksi ruskeiden ja valkoisten helmien muodostama joukko.

Lapsen tehtävänä on vastata seuraavanlaiseen kysymykseen: "Onko tässä enemmän ruskeita helmiä vai enemmän helmiä?". Oletetaan, että lapsi ilmoittaa ruskeita helmiä olevan enemmän. Piaget päättelee tästä, että tällainen lapsi ei kykene tarkastelemaan osaa ja kokonaisuutta yhtäaikaisesti. Piaget selittää tämän niin, että tällainen lapsi ei omaa vielä luokitteluun liittyvää kognitiivista struktuuria (ryhmitys I). Piaget käyttää tällaisia kompetenssiselityksiä muillakin tarkastelluilla kognitiivisten sisältöjen alueilla. Eikö voisi ajatella, että tehtävän asettelu on harhauttava samassa mielessä kuin illuusioharhojen käyttö tarkastelluissa säilyvyys- ja transitiivipäätelmissä. On todennäköistä, että tehtävissä, joissa osaluokkien keskinäinen kvantitatiivinen ero on suuri, lapset keskittyvät helposti vertailemaan osaluokkia keskenään. Tätä kutsutaan havaintojoukko-hypoteesiksi (Wohlwill 1968). Toinen usein käytetty suoritushypoteesi on väärintulkinta-hypoteesi. Tämän oletuksen mukaan lapset tulkitsevat inkluusiokysymyksen osaluokkien vertailukysymykseksi (Wohlwill 1968). Kumpikaan selitys ei ole saanut kokeellisesti riittävää tukea (esim. Brainerd 1978, ss. 181 - 183, Keranto 1981, Klahr & Wallace 1976, ss. 81 - 105). Tämän työn kokeellisessa osassa pyritään ratkomaan kyseistä ongelmaa vihjesanojen ja lapsen oman selityksen synteesin kautta. Tämä saattaa olla uusi näkökulma, joka avaa "solmun" ja antaa tietoa siitä, missä vaiheessa lapset todella tajuavat inkluusion.

Piaget'n "luku"

Kuten väitöskirjassani totean Piaget'n "luku" ei viittaa suoranaisesti lukusanojen käyttöön eikä siihen, mitä normaalisti luvulla ymmärretään (Keranto 1981). Kun Piaget keskustelee luvusta, niin melkein aina on tarkastelun kohteena yksi-yksi-vastaavuuden säilyvyys (Beth & Piaget 1966, Piaget 1952). Toisin sanoen Piaget'n "luku" vastaa hyvin pitkälle primitiivisen yksi-yksi-vastaavuuden eli ekvivalenssin säilyvyyttä diskreettien kvantiteettien tapauksessa.

Piaget kytkee "lukunsa" kehityksen hyvin läheisesti aiemmin tarkasteltujen relaationaalisten ja luokittelukykyjen kehitykseen. Tarkemmin sanottuna "luku" on luokkien inkluusion ja

järjestyssuhteiden synteesi (Piaget 1952). Tämä on sikäli ymmärrettävää, että luonnollisilla luvuilla on kaksinainen merkitys. Niiden avulla voidaan vastata sekä lukumäärää että järjestystä koskeviin kysymyksiin. Tämän ohella nämä järjestys- ja lukumääräominaisuudet ovat keskinäisessä riippuvuussuhteessa. Se ei ole ymmärrettävää, miksi Piaget tutkii lukukäsitteen kehitykseen liittyviä esinumeerisia toimintoja (säilyvyydet, relaatiot, luokat) erillään lukusanojen käytöstä. Jotta voisimme puhua pätevästä lukukäsitteestä tai mittaamisen ideasta, ei esinumeerisia ja numeerisia toimintoja voi näkemykseni mukaan tarkastella irrallisina. Tämä koskee erityisesti tilannetta, kun tutkitaan lapsen matemaattis-loogisen ajattelun kehitystä. Toisin sanoen psykologisesti tässä on kysymys esinumeeristen toimintojen liittämisestä numeerisiin toimintoihin. Matematiikan näkökulmasta on tässä kysymys homomorfisesta kuvauksesta matemaattiselta struktuurilta toiselle (esim. Freudenthal 1973, Osborne 1976). Vaikka matematiikan ja logiikan eräissä suuntauksissa sekä Piaget'n teoriassa pyritään lukukäsite ja mittaamisen idea perustamaan esinumeerisiin objekteihin ja näiden välisiin relaatioihin, ei näin tarvitse olla lapsen näkökulmasta (Fuson & Hall 1982, Keranto 1981, Vygotsky 1962). On ilmeistä, että lapsi käyttää lukusanoja oppiakseen ymmärtämään niiden merkityksen. Tällöin tilanne ei ole yksisuuntainen esinumeerisista numeerisiin toimintoihin vaan pikemmin kaksisuuntainen! Tähän palataan laskemistaitojen yhteydessä.

Edellä esitetyn ohella on tärkeää huomata, että Piaget'n näkemys "luvun" yhdensuuntaisesta kehityksestä luokkien inkluusion ja transitiivipäätelmien kanssa ei ole saanut kokeellista tukea. Päinvastoin on osoittautunut, että relaationaaliset päätelmät edeltävät säilyvyyspäätelmiä ja siis "lukua". Toisaalta säilyvyyspäätelmät edeltävät traditionaalisesti mitattuja inkluusiokykyjä (esim. Brainerd & Fraser 1975, Keranto 1981, Winer & Kronberg 1974). Toisin sanoen on todisteita pikemmin jonottaisesta kuin paralleelista kehityksestä relaatio-, luokittelu- ja "luku"-kykyjen osalta. Siitä missä määrin aritmeettinen suorituskyky on selitettävissä Piaget-kykyjen avulla, ei saada tietoa Piaget'n tutkimuksista. Tähänkin asiaan palaan laskemistaitojen tarkastelun yhteydessä.

III B PIAGET-KYKYJEN KOKEELLINEN NÄKÖKULMA

Kokeellisessa osassa pyritään operationalisoimaan Piaget-operaatiot sekä tutkimaan niiden kehityksellisiä sekä riippuvuussuhteita toisiinsa nähden. Jaetaan nämä operaatiot kolmeen luokkaan: 1) relaationaaliset päätelmät, 2) luokkien inkluusio ja 3) epäjatkuvien ja jatkuvien objektien säilyvyydet. Näiden sisältöjen yhteydessä havaittuja kykyjä kutsutaan tässä Piaget-kyvyiksi. Näiden kykyjen kriteerinä voidaan ja on käytetty suoritusten oikeellisuuteen tai tiedostamisen asteisiin perustuvia kriteeristöjä. Piaget itse vaatii operationaalisen asteen saavuttamiselta tietoisuutta omista ajatteluprosesseista. Galperin on lähellä Piaget'n näkökulmaa ja puhuu "toisen signaalisysteemin siirtämisen jälkeenjääneisyysilmiöstä" (Galperin 1957, Keranto 1979, Piaget 1976). Toisaalta esimerkiksi Brunerille riittää, kun lapsen symbolinen esitystapa on aktivoitunut ja lapsi kykenee voittamaan visuaaliset harhat (Bruner 1964, Keranto 1981).

Tässä työssä noudatetaan lähinnä tiedostamisen asteisiin perustuvaa kriteeristöä. Toisaalta Piaget-kykyjen kehitystä tullaan tarkastelemaan myös suoritusten oikeellisuuteen perustuvien kriteerien valossa. Tiedostamiseen perustuva pisteytys on ordinaalinen 0,1 tai 2. Suoritusten oikeellisuuteen perustuva pisteytys on dikotominen 0 tai 1.

1. Relaationaaliset kyvyt; mittari ja pisteytys

Relaationaalisista päätelmistä tutkitaan tässä työssä transitiivipäätelmiä ja substituutiopäätelmiä konkreettisissa pituus- ja painoyhteyksissä. Kaksi osiota (TR 1-2) on laadittu mittaamaan pituuden epäsymmetriseen ja symmetriseen relaatioon liittyviä transitiivipäätelmiä. Osion TR4 tarkoitus on mitata painojen epäsymmetriseen relaatioon liittyvää päättelyä. Osio TR3 ei ole tavanomainen transitiivitehtävä. Tässä tehtävässä lapsen on kyettävä tekemään tarkkoja havaintoja mittakepillä lopuksi vertailtavien objektien suhteellisesta pituudesta. Tämä oli sikäli mahdollista, koska työssä käytettiin Cuisenaire-palikoita (ero pienimmillään on 1 cm). Korvaamispäättelyä tutkittiin kolmen osion (SUBS1-3) avulla. Näistä ensimmäinen tehtävä liittyy

painosisältöön ja loput kaksi pituussisältöön (ks. liite IIIi). Arvailumahdollisuudet pyrittiin minimoimaan. Ensinnäkin kysymysten asettelussa käytettiin monivalintatyyppiä, "onko täällä "< " , " >", vai " = " "objektia kuin on täällä?". Tämän ohella kysymys kohdistui aina ensiksi mitattuun objektiin. Tällä tavoin aiemmista tutkimuksista todettu mittakepin ja jälkimmäisen objektin vertailuun perustuva "oikea" ratkaisu pyrittiin eliminoimaan (ks. Keranto 1981). Relaationaalisiin kykyihin luetaan tässä työssä myös sarjoittamiskyvyt, joita tutkittiin kahden osion avulla (SER1-2). Lapsen oli kyettävä tekemään "sarja" Cuisenaire-palikoista (SER1) sekä sijoittamaan oikeaan kohtaan "sarjassa" uusi palikka (SER2).

Relaationaalisten kykyjen pisteytyskriteerit ovat seuraavat. Transitiivi- ja substituutiopäätelmissä tiedostamisen asteisiin perustuvien kriteerien mukainen pisteytys: 0 pistettä, kun väärä prosessi ja johtopäätös; 1 piste, kun oikea prosessi ja johtopäätös, mutta ei pätevää selitystä. Intuitiivisia selityksiä oli esimerkiksi seuraavat: "se on tehty lyhyemmästä puusta", "joku on tehnyt ne yhtäpitkiksi", "koska siellä on niin vähän sisällä"; 2 pistettä, kun oikea prosessi ja johtopäätös sekä pätevä selitys. Esimerkkejä pätevistä selityksistä ovat seuraavat: "koska se oli tätä (mittakeppi) lyhyempi ja tämä on tätä (mittakeppi) pidempi", "koska ne kummatkin ovat tämän (mittakeppi) mittaisia", "koska nää oli yhtäpitkiä ja toi oli pidempi tätä (mittakeppi)". Sarjoittamiseen liittyvä pisteytys määräytyi prosessin sujuvuuden perusteella: 0 pistettä, kun sarjoitus tai sijoitus ei onnistunut; 1 piste, kun suoritus tapahtuu yritys- ja erehdys-menetelmällä; 2 pistettä, kun edetään systemaattisesti pienimmästä suurimpaan tai toisinpäin.

Suoritusten oikeellisuuteen liittyvä pisteytys saatiin suoraan edellä olevista siten, että 0 on 0 ja muut ovat 1 suorituksia. Suoritusten oikeellisuuteen perustuvista suorituksista muodostetaan summamuuttujat $TR = \sum_{i=1}^{4} TR_i$, $SUBS = \sum_{i=1}^{3} SUBS_i$ ja $SER = \sum_{i=1}^{2} SER_i$. Suoritusten tiedostamiseen perustuvista asteista muodostetaan summamuuttujat $TTR = \sum_{i=1}^{4} TTR_i$ ja $TSUBS = \sum_{i=1}^{3} TSUBS_i$ sekä $SSER = \sum_{i=1}^{2} SSER_i$.

2. Inkluusiokyvyt; mittari ja pisteytys

Onko todella niin, että koulutulokkaat eivät kykene tarkastelemaan luokan ja sen osaluokan kvantitatiivisia suhteita? Tämän kysymyksen ratkaisemiseksi on aiemmin tehty monenlaisia mittareita kuten teoriaosasta selvisi. Tässä työssä ryhdyttiin seuraaviin koejärjestelyihin. Ensinnäkin mittarin laadinnassa käytettiin hyväksi aiemmin saatuja kokemuksia sekä matemaattisen ongelmanratkaisun ideoita (Goldin & McClintock 1980, Keranto 1981). Traditionaaliseen ongelmanasetteluun tehtiin vihjesana kaikkiaan lisäys. Tämän ohella kuudesta käytetystä inkluusio-osiosta (IN1-6) osiot IN1 ja IN4 laadittiin siten, että ne sisältävät mahdollisimman vähän kielellisiä "karikoita". Osiot IN2, IN3 sekä IN5, IN6 ovat lähempänä klassista Piaget-asettelua (ks. liite III1). Tämän lisäksi tehtävät IN1-3 esitettiin osalle testattavista ilman vihjesanaa kaikkiaan. Tehtävät IN4-6 esitettiin kaikille koulutulokkaille samalla tavoin. Tehtäviä IN4-6 käytetään tässä työssä edellä olevasta johtuen inkluusion tajuamisen (IN) mittana. Inkluusiopäätelmien pisteytys suoritettiin samaan tapaan kuin relationaalisten päätelmien pisteytys: 0 pistettä kun koehenkilö vertailee osaluokkia keskenään; 1 piste, kun osaluokan ja luokan välivertailu ja epäpätevä selitys. Tällaisia selityksiä oli esimerkiksi seuraavat: "mintuissa on vähemmän syömistä", "noita on enemmän". 2 pistettä, mikäli luokan ja osaluokan pätevä vertailu ja selitys. Selitykset voidaan jakaa luokkiin: visuaalinen selitys, "jos ottaisin vain vihreät on näin paljon, kaikkiaan on näin paljon" (ympyröiden kädellään); yhdistämiseen eksplisiittisesti viittaava selitys, "jos otan ruskeat vielä lisää, niin enemmän kaikkiaan"; erottamiseen eksplisiittisesti viittaava selitys, "jos otan vain oranssit, niin ruskeat jää pois, joten kaikkiaan enemmän"; lukumäärien vertailuun perustuva selitys, "karkkeja on kaikkiaan 18 ja suklaakarkkeja vain 9". Tämän työn laajuudesta johtuen tullaan yksityiset selitystyypit raportoimaan vasta seuraavassa raportissa. Tämä tulee koskemaan jatkossa myös muita sisältöjä.

Suoritusten oikeellisuus pisteet 0 ja 1 saatiin prosessin ja johtopäätösten oikeellisuudesta samaan tapaan kuin edellä. Suoritusten oikeellisuuteen perustuvista suorituksista saatiin summamuuttuja $IN = \sum_{i=4}^{6} IN_i$. Suoritusten tiedostamiseen perustuvista asteista saatiin toinen summamuuttuja $TIN = \sum_{i=4}^{6} TIN_i$.

3. Säilyvyyskyvyt; mittari ja pisteytys

Säilyvyyskyvyistä tutkitaan tässä työssä klassisia epäjatkuvien objektien sekä jatkuvien objektien säilyvyyksiä sekä luvun säilyvyyttä epäjatkuvassa ja jatkuvassa tapauksessa. Tarkastellaan ensin epäjatkuvaan tilanteeseen liittyviä osioita EC1-3 ja JEC (ks. liite IIII). Tehtävät EC1-3 liittyvät todetun ekvivalenssin säilyvyyteen sekä JEC todetun inekvivalenssin säilyvyyteen. Pisteytys: 0 pistettä, mikäli visuaalisen "harhautuksen" jälkeen ilmoittaa väärin alunperin todetun kvantitatiivisen suhteen; 1 piste, mikäli käytti lukuja (yhdestä neljään lasta osiosta riippuen) tai ei osaa perustella oikeaa vastausta; 2 pistettä, mikäli kykenee pätevästi perustelemaan oikean vastauksensa. Havaittiin seuraavanlaisia selityksiä: selitys perustuu siihen, että ei lisätty eikä vähennetty mitään; negaatioon perustuva selitys eli tilanne voidaan palauttaa ennalleen; kompensaatioon perustuva selitys eli kiinnitetään huomio sekä pituuksiin että tiheyksiin.

Jatkuviin pituuden säilyvyystilanteisiin liittyvät osiot ovat ILC, ELC ja ILMC (ks. liite IIII). Osio ILC on pituuden säilyvyysongelma identiteettitapauksessa ja osio ELC vastaava osio ekvivalenssitapauksessa. Osio ILMC on todetun mittaluvun säilyvyysongelma identiteetin tapauksessa. Kyseisten osioiden pisteytys on hankalampaa kuin diskreettien objektien tapauksessa.

Osioiden ILC ja ELC pisteytys on seuraava: 0 pistettä, mikäli heti vastaa väärin eikä selitä miksi lyhyempi; 1 piste, mikäli vastaa oikein, mutta ei osaa pätevästi perustella tai osaa pätevästi perustella, mutta siitä huolimatta tulkitsee kysymyksen aikuisen näkökulmasta tarkasteltuna väärin; 2 pistettä, mikäli oikea päätelmä ja pätevä perustelu. Havaittiin seuraavia päteviksi tulkittuja selityksiä: selitys, joka perustuu perimmiltään tietoon, ettei mitään ole otettu pois eikä lisätty, esim. "ei ole lähtenyt palaa pois", "se olisi pidentynyt vain, jos hitsaisit lisää", "sä vain taivutit sitä"; selitys, joka perustuu palautusmahdollisuuteen, esim. "voin suoristaa langan

jälleen"; selitys, joka perustuu kompensaatioon, esim. "tähän mutkaan menee rautalankaa, joten tämä pää täällä on nyt täällä".

Osion ILMC pisteytys on muuten sama kuin edellä, paitsi että 0 piste tuli aina mikäli vastaus ei ollut oikea.

Suoritusten oikeellisuus-pisteet edellä olevissa tehtävissä saatiin siten, että vain oikea heti annettu vastaus tuotti 1 pisteen, muuten 0. Kyseisistä osioista muodostettiin summamuuttujia. Suoritusten tiedostamiseen liittyvät summamuuttujat ovat TEJEC=TEC1+TEC2+TEC3+TJEC ja TLC=TILC+TELC+TILMC. Vastaavat suoritusten oikeellisuuteen perustuvat summamuuttujat ovat EJEC ja LC.

Luvun säilyvyyttä identiteetin tapauksessa mitattiin osioilla NC1 ja NC2 (liite IIII). Pisteytys: 0 pistettä, jos laskee uudestaan ja ilmoittaa väärän luvun; 1 piste, jos laskee uudestaan tai ilmoittaa heti oikean luvun, mutta ei osaa perustella; 2 pistettä, kun vastaa heti oikein ja osaa perustella päätelmänsä. Havaittiin seuraavia päteviksi luokiteltuja päätelmiä: selitys, joka perustuu siihen, ettei mitään ole lisätty eikä poistettu, esim. "sä vain liikutit niitä", "sä et lisännyt etkä vähentänyt mitään"; käänteiseen ajatteluun perustuva selitys, esim. "voit panna ne takaisin suppuun"; kompensaatioon perustuva selitys, esim. "nämä on leveämmällä mutta samalla harvemmassa kuin alussa".

Suoritusten oikeellisuuteen liittyen 1 piste tuli, kun annettiin heti oikea vastaus, muuten 0. Tiedostamisen perustuvista pisteistä saatiin summamuuttuja TNC=TNC1+TNC2.

4. Suoritusten oikeellisuusprosentit

Suoritusten oikeellisuuteen perustuvat prosenttiluvut on esitetty taulukossa 1. Tehtävät on asetettu prosenttilukujen ilmoittamaan vaikeusjärjestykseen. Inkluusiotehtävien IN1-3 suoritukset on jaettu kahteen luokkaan. IN_v 1-3 ilmoittavat suoritukset, joissa vihjesana oli mukana. IN_t 1-3 ilmoittavat traditionaaliseen tehtävän asetteluun liittyvät suoritusprosentit.

Taulukko III 1. Piaget-kykyjen vaikeusjärjestys suoritusten oikeellisuus-prosenttien valossa (N=35 paitsi, kun IN_v1-3/ N=15 sekä IN_t1-3/ N=20)

TR1	TR4	SUBS1	SUBS2	SER1	IN_v1	IN4	TR2	SUBS3	SER2	IN6	IN5	IN_v2	TR3
100	100	100	100	100	100	100	97	97	97	94	91	80	80

EC2	JEC	IN_v3	NC2	EC1	EC3	NC1	IN_t1	IN_t2	IN_t3	ILC	ELC	ILMC	
77	74	73	71	69	69	60	40	35	35	31	31	17	

Transitiivi- ja substituutio-päätelmät sekä sarjoittaminen ovat lähes 100 %-toimintoja. Tämä tulos on yhdenmukainen aiemman tutkimukseni kanssa (Keranto 1981). Relaationaalisten päätelmien sisällä ei ole viitteitä horisontaalisiirtymistä. Tähän helpoimpaan vaikeusryhmään, mielenkiintoista kyllä, kuuluvat myös mainitulla vihjesanasysteemillä mitatut inkluusiopäätelmät IN1,4-6. Toisin sanoen vaikuttaa siltä, että lapset kykenevät tarkastelemaan osaa ja kokonaisuutta yhtäaikaisesti, kunhan kysymyksen asettelu hoidetaan pätevästi. Tämä tulee vielä pätevämmin esiin, kun tarkastellaan suoritusten IN_v1-3 ja IN_t1-3 prosenttilukujen eroja. Itse asiassa erotukset nousevat vähintäin melkein merkitsevälle tasolle: $IN_{v,t}1^{***}$, $IN_{v,t}2^{**}$ ja $IN_{v,t}3^{*}$. Toisaalta traditionaalisten inkluusiotehtävien suoritusprosentit (35 % - 40 %) vastaavat aiemmista töistäni havaittuja prosenttilukuja (Keranto 1979, 1981). Palaan inkluusiopäätelmiin seuraavassa kappaleessa.

Toisen vaikeusryhmän muodostavat epäjatkuvien objektien säilyvyyteen liittyvät ongelmat (EJEC) ja (NC). Kolmanteen vaikeusryhmään kuuluvat mainitut traditionaaliset inkluusio-ongelmat IN_t1-3 sekä jatkuvien objektien (pituus) säilyvyyden ongelmat (LC). On ilmeistä, että epäjatkuvien ja jatkuvien objektien säilyvyyksien kehityksessä on horisontaali-siirtymä. Toisaalta tehtävien ILC ja ELC prosenttiluvut ovat samat. Tämä vihjaa jatkuvien objektien identiteetin ja ekvivalenssin yhtäaikaiseen kehitykseen. Näistä tarkemmin seuraavassa.

5. Tiedostamiseen perustuvien Piaget-kykyjen riippuvuus- ja kehityssuhteet

Puolitusmenetelmällä määrättiin Piaget-kykyjen reliabiliteettiarvot, jotka vaihtelivat .70 - .99 välillä. Sarjauksen ja transitiivisuuden reliabiliteettiarvot olivat .70 - .80. Uudella systeemillä tutkittujen inkluusiopäätelmien reliabiliteettiarvo on .85 luokkaa, joka on selvästi parempi kuin traditionaalisissa inkluusioissa aiemmin saadut arvot (Keranto 1979, 1981). Substituutiopäätelmien (TSUBS) luvun säilyvyyksien (TNC) ja ekvivalenssin säilyvyyksien (TEJEC) reliabiliteettiluvut vaihtelevat välillä .86 - .94. Osioiden ILC ja ELC erittäin korkeasta korrelaatiosta (.98) laskettu reliabiliteettiluku on .99. Saavutettuja luotettavuuslukuja voitaneen pitää vähintäinkin tyydyttävinä.

Miten sitten Piaget-kyvyt riippuvat toisistaan ja mikä on niiden kehitysjärjestys koulutulokkaiden tapauksessa? Taulukossa III 2. on esitetty tiedostamiseen perustuvien summamuuttujien korrelaatiot. Liitteessä 2 on Piaget-kykyjä mittaavien yksittäisten osioiden korrelaatiot (liite 2).

Taulukko III 2. Tiedostamiseen perustuvien Piaget-kykyjä mittaavien summamuuttujien korrelaatiot (N=35)

	TSUBS	SSER	TIN	TEJEC	TNC	TLC
TTR	.84***	.47**	.45**	.55***	.28	.41*
TSUBS		.37*	.36*	.55***	.17	.45**
SSER			.63***	.36*	.37*	.21
TIN				.37*	.54***	.32
TEJEC					.46**	.55***
TNC						.34*

*** $p < .001$ ** $p < .01$ * $p < .05$

Yleisesti ottaen summamuuttujat ovat ainakin melkein merkitsevästi ($p < .05$) riippuvia toisistaan. Kuten ennalta oli odotettavissa ovat TTR- ja TSUBS-kyvyt erittäin merkitsevästi toisistaan riippuvia. Tätä osoittaa myös yksittäisten osioiden väliset, välille .57-.74 sijoittuvat korrelaatiot, kun "vale-transitiivitehtävää" TTR3 ei oteta mukaan tarkasteluun (liite III 2).

Korkeat korrelaatiot relationaalisten päätelmien (TTR)&(TSUBS) sekä säilyvyyksien TEJEC ja TLC välillä viittaavat siihen, että nämä päätelmät ovat oleellisia selittäjiä säilyvyystehtävissä onnistumisessa. Muuttujien TIN ja TNC erittäin merkitsevä riippuvuus vihjaa siihen, että luvun säilyvyystehtävissä on oleellista osan ja kokonaisuuden välisen suhteen tajuaminen. Tältä osin tulokset tukevat Piaget'n ajatuksia inkluusion ja säilyvyyksien läheisestä yhteydestä.

Miten sitten Piaget-kyvyt ovat kehittyneet toisiinsa nähden koulutulokkaiden ikäalueella? Tätä varten laadittiin tarkasteltaviin sisältöihin liittyvistä tehtävistä "tyyppiarvot" kullekin koehenkilölle: (TTR)-, (TSUBS)-, (TIN)-, (TEJEC)- ja TLC-tasot määrättiin seuraavan kriteerin mukaan: 0-taso, jos N(0-suoritus)≧ 2; 1-taso, jos N(1-suoritus)≧ 2 ja 2-taso, jos N(2-suoritus)≧ 2. (SSER)- ja (NC)-tasot määrättiin seuraavasti: 0-taso, jos N(0-suoritus)=2; 1-taso, jos N(1-suoritus)≧ 1 ja 2-taso, jos N(2-suoritus)=2.

Taulukosta III 3. ilmenee Piaget-kykyjen kehitysjärjestys. Kriittiset arvot on laskettu binomiaalitestin mukaan (Keranto 1981, Siegel 1958).

Taulukko III 3. Piaget-kykyjen kehitykselliset suhteet (N=35)

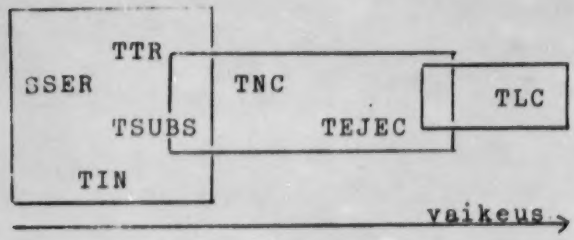
	SSER			TIN			TEJEC			TNC			TLC		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	0	1'	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
TTR 1	0	3	5'	1	4	3	4*	1	3	0	5	3	6***	1	1
2	0	1	25	1	0	25	2*	4*	20	1	7	18	5***	13***	8

	TIN			TNC			TLC		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	0	3*	3*	0	7	0	6	1	0
TEJEC 1	0	0	5*	0	1	4	1***	3	1
2	1	2	20	1	5	17	5***	10***	8

*** $p < .001$
** $p < .01$
* $p < .05$
, $p < .10$

Taulukkojen III 2 ja 3 perusteella esitetään seuraava varsin karkea Piaget-kykyjen kehityskaavio. Tämän yksityiskohtaisempaan

analyysiin ei tässä työssä ryhdytä, koska on pidettävä mielessä työn päätavoitteet.



Kaavio III 1. Piaget-kykyjen kehityksen karkea malli koulutulokkaiden ikäalueella (6 v 8 kk - 7 v 8 kk)

Relaationaaliset kyvyt (TTR, TSUBS ja SSER) kehittyvät uudella tavoin mitatun luokkien inkluusion TIN kanssa synkronisesti, kuten Piaget'n teoriasta voi olettaakin. Toisaalta ekvivalenssin säilyvyys TEJEC näyttäisi olevan luokkaa vaikeampi kyky. Pituuden säilyvyys kehittyy selvästi hitaammin kuin yksikään muu tutkittu kyky. Tämä on yhdenmukaista aiempien tutkimusten ja teoreettis-loogisten pohdintojen kanssa. Pituuden ekvivalenssin (ELC) ja identiteetin (ILC) säilyvyyksien välillä on erittäin korkea korrelaatio (.98). Täten tämän työn perusteella ei voida väittää, että identiteetin säilyvyys edeltäisi ekvivalenssin säilyvyyttä jatkuvien suureiden (pituus) tapauksessa.

Lopuksi tarkastelen mitä vaikutuksia inkluusiotehtävän asettelun muutoksella oli tutkittujen lasten tiedostamisen tasoon. Tulokset on tiivistetysti esitetty taulukossa III 4.

Taulukko III 4. Tehtävänasettelun muutoksen vaikutus tiedostamistasoon inkluusiopäättelyssä (N=20 ja N=15)

		TIN_t 1-3			TIN_v 1-3		
		0	1	2	0	1	2
TIN_v 4-6	0	1	0	0	1	1	0
	1	1***	0	0	0	3	1
	2	11***	0***	7	0	0	9

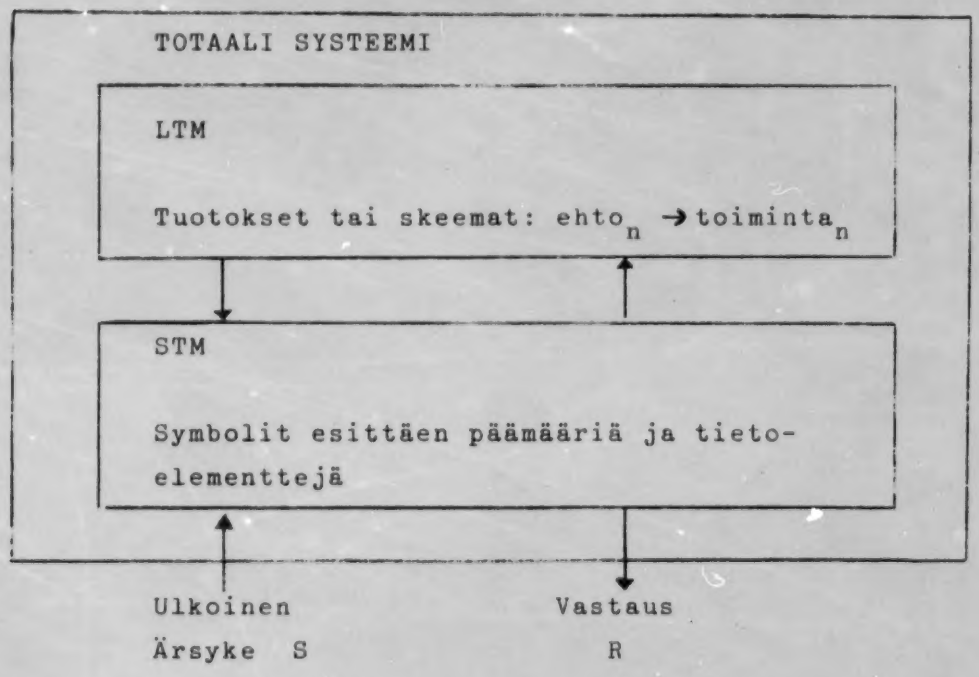
***$p < .001$

Taulukon III 4 perusteella voidaan päätellä seuraavaa. Ensinnäkin ne lapset, joille esitettiin inkluusiotehtävät vihjesanamuodossa, pärjäsivät yhtä hyvin sekä TIN 1-3 että TIN 4-6

osioissa. Itse asiassa näiden suoritusten välinen korrelaatio on erittäin korkea .89*** . Toisaalta niiden lasten tapauksessa (N=20), joille esitettiin tehtävät TIN 1-3 traditionaalisessa muodossa eli ilman vihjesanaa, tapahtui erittäin merkitsevä siirtymä heikompaan suuntaan. Toisin sanoen inkluusiotehtävät ovat kovin herkkiä instruktion suhteen. Toisaalta edellä esitetyn nojalla on selviä viitteitä siitä, että koulutulokkaat kykenevät yleensä inkluusiopäätelmiin eli osaavat vertailla luokan ja sen osaluokan kvantitatiivisia suhteita. Havaittu mielenkiintoinen tulos on todettava uudestaan jossain toisessa tutkimuksessa ennen kuin voidaan sanoa, että Piaget'n lukukäsitteen kehittymispohdiskelut ovat tältä osin oikeita.

IV A INFORMAATION KÄSITTELYKAPASITEETTI JA MUISTAMINEN

Informaation prosessoinnin näkökulmasta keskeisiä matemaattisen ongelmanratkaisun käsitteitä ovat matemaattisia ajatteluprosesseja ohjailevat ja kontrolloivat strategiat, informaation käsittelykapasiteetti sekä yksilön skeemat. Aiemmista kokemuksista muotoutuneet skeemat tai tuotokset on taltioitu pitkäaikaiseen muistiin (LTM = Long Term Memory). Tietojen käsittely tapahtuu lyhytaikaisessa muistissa (STM = Short Term Memory) (esim. Klahr & Wallace 1976, Leino 1981a, b, 1982a, Newell 1973, Newell & Simon 1972). Tietojen inhimillistä käsittelyä voidaan kuvata seuraavalla tiedon prosessointimallilla (kaavio IV 1).



Kaavio IV 1. Informaation käsittelymalli; modifikaatio Newellin mallista 1973

Prosessointimallia voidaan lyhyesti luonnehtia seuraavasti. LTM käsittää järjestettyjen ehto-toiminta-yhdelmien organisoidun systeemin. Näitä ehto-toiminta-yhdelmiä voidaan kutsua tuotoksiksi tai skeemoiksi. Näihin olemme tutustuneet edellisessä luvussa. Mallissa tuotokset ja tuotossysteemit ovat järjestäytyneet hierarkkisesti. Ensimmäiselle "portaalla" ovat spesifeistä kokemuksista määräytyneet säännöt, kuten esimerkiksi transitiivipäättelyn säännöt. Kuten muistetaan, niin näiden

sääntöjen tarkoituksena on ylimääräisen prosessoinnin välttäminen. Nämä tuotokset liittyvät siis yksilön kokemuksiin tietyistä kognitiivista sisällöistä. Mikäli tuotosetsintä jatkuu toiselle ja kolmannelle portaalle, tapahtuu tuotoksissa laadullinen muutos. Toisen ja kolmannen portaan tuotokset ja tuotossysteemit on oletettu olevan vähemmän differentioituneita kuin ensimmäisen "portaan" tuotokset ja tuotossysteemit. Ne esittävät mahdollisia reagointimalleja tilanteissa, joissa systeemillä tai yksilöllä ei ole aiempaa kokemusta relevanteista käyttäytymisjonoista. Itse asiassa portaalle 2 on sijoitettu saatavilla olevien ongelmanratkaisustrategioiden valikoima. Portaalla 3 ovat tuotokset ja tuotossysteemit, jotka säätelevät systeemin itsemodifikaatiota. Portaan 3 tuotokset liittyvät konsistenttien jonojen ja sääntöjen luomiseen. On oletettu, että tämän portaan toiminto on pitkälti systeemin sisäistä ja on suurelta osin rajattu unen periodeihin (vrt. Klahr & Wallace 1976, ss. 184 - 187).

On tärkeää huomata, että kaikki tuotokset on oletettu olevan saman organisointiprosessin alaisia. Kaikilla tuotoksilla on ehtotoiminta muoto. Tuotosten ehto-osa viittaa lyhytaikaisen muistin (STM) symboleihin, jotka esittävät systeemin päämääriä ja tietoelementtejä. Tuotosten toiminta-osa viittaa lyhytaikaisessa muistissa suoritettaviin transformaatioihin, joita ovat tavoitteiden luonti, keskeytys ja tyydytys, olemassa olevien elementtien muotoilu ja uusien elementtien lisääminen. Periaatteessa systeemi voi vastata informaatioon lyhytaikaisessa muistissa vain tuotosten ehtojen kautta. Tämän ohella se voi modifioida informaatiota vain tuotosten toimintojen avulla (vrt. Klahr & Wallace 1976, ss. 5 - 15).

Aistimus tulee systeemin tietoon aistimusrekisterin kautta. Tästä tieto siirtyy lyhytaikaiseen muistiin pitkäaikaisen muistin tuotosten testatessa sitä. Kun jonkin tuotoksen ehto-osa vastaa tiedon symbolia tai symboleita lyhytaikaisessa muistissa, herää tuotoksen toiminta-osa. Tästä alkaa syklinen automaattisesti kertautuva prosessi. Prosessi päättyy, kun kaikki tilanteeseen liittyvät ehto-osat on kertaalleen aktivoitu. Täten selittyvät muuten havainnot, joiden mukaan tietty ärsyke aktivoi kokonaisen skeemojen reaktiosarjan (vrt. Klahr & Wallace 1976, ss. 5 - 15, Leino 1982a).

1. Informaation käsittelykapasiteetti

Informaation käsittelykapasiteetti viittaa maksimimäärään skeemoja tai informaation 'palasia', jotka yksilö kykenee aktivoimaan ja käsittelemään lyhytaikaisessa/työmuistissa yhtäaikaisesti. Pascual-Leone käyttää tästä nimitystä M-voima (M-power) (Pascual-Leone 1970). M-voiman eli maksimaalisen henkisen ponnistuksen tietyssä tehtävässä on oletettu vaihtelevan ikäryhmien sisällä ja välillä. Tietyn ikäryhmän sisällä erojen on päätelty johtuvan lähinnä biologisista tekijöistä. Myös ikäryhmien väliset erot on oletettu suuresti riippuvan kypsymisestä. Itse asiassa informaation käsittelykapasiteetissa havaituilla eroilla on pyritty selittämään Piaget'n kehityskausien määräytymistä (esim. Biggs 1980, Case 1980, Collis 1975, Pascual-Leone 1970). Normaalien lapsien M-voiman on oletettu kasvavan lineaarisesti iän mukana. Seuraavassa kaaviossa on esitetty tiivistetysti M-voiman kasvu iän funktiona. Kaaviosta ilmenee myös vastaavat Piaget'n kehitysasteet (vrt. Case 1974, Collis 1975, Pascual-Leone 1970).

Tavallinen minimi-ikä	M-voima (e + k)	Piaget'n kehitysaste
3 - 5	e + 1 (2)	esioperationaalinen
6 - 8	e + 2 (3)	aikaiset konkreetit operaatiot II A
9 - 12	e + 3 (4-5)	keski-konkreetit operaatiot II B
13 - 15	e + 4 (6)	aikaiset formaalit operaatiot III A
15 +	e + 5 (7)	formaalit operaatiot III B

Kaavio IV 2. Informaation käsittelykapasiteetin kasvu ja Piaget'n operationaaliset tasot (versio mallista Collis & Biggs 1976)

Kaaviossa vakio e viittaa henkiseen ponnistukseen, joka vaaditaan aktivoimaan yliopittu toimeenpaneva skeema. Numerot viittaavat operatiivisten tai figuratiivisten skeemojen maksimimäärään, jotka voidaan aktivoida toimeenpanevan skeeman ohjauksessa

ilman suoraa tukea havaintoon. Suluissa olevat luvut M-voiman sarakkeessa ilmaisevat Casen ja Pascual-Leonen arvion kapasiteetin kehityksestä (Case 1974, Pascual-Leone 1970). Lukujen eroavuudet vihjaavat, että informaation käsittelykapasiteetin mittaukset ovat strandardisoimatta ja että M-voima saattaa suuresti riippua tehtävän sisällöstä ja yksilön M-voiman hyödyntämistendenssistä. On nimittäin ilmeisen vaikea sanoa tarkasti, mikä vastaa normaalissa ongelmatilanteessa yhtä informaatioyksikköä. Toisin sanoen pitäisi ilmeisesti löytää kutakin kognitiivista sisältöä vastaava informaation prosessoinnin perusyksikkö. Tällaista yksikköä apuna käyttäen voitaisiin todeta yksilön informaation käsittelykapasiteetti ja kyseisen sisällön käsittelypaineet prosessin kullakin hetkellä. Tällaisia hienonnettuja menettelytapoja ei ole vielä kehitetty kovinkaan pitkälle. Informaation kapasiteetin mittauksissa on käytetty lähinnä lukujen luetteluun tai laskemiseen liittyviä mittoja, joita tarkastellaan seuraavassa.

2. Informaation käsittelykapasiteetin operationalisointi matemaattisten sisältöjen yhteydessä

Informaation käsittelykapasiteettia (IPC) on pyritty operationalisoimaan seuraavasti. On ajateltu, että IPC on mitattavissa sinä määränä informaation palasia, jotka yksilö kykenee pitämään yhtäaikaisesti mielessään samalla kun hän operoi niillä. Matemaattisten sisältöjen yhteydessä ehkä tavallisimmin käytetty testi on BDS (Backward Digit Span). Näissä tehtävissä koehenkilöä pyydetään sanomaan käänteisessä järjestyksessä yksiköitten sarja (kahdesta neljään yksikköä), jonka on juuri kuullut (Case 1972, 1980).

Toinen käytetty testi on DPT (Digit Placement Task) (Case 1972, Case & Globerson 1974). Tässä testissä lasten oli osattava asettaa jokin luku oikeaan paikkaan nousevassa muiden lukujen sarjassa. Tämän mitan uusintareliabiliteetti oli .58. Edellisen testin puolitusreliabiliteetti oli .81.

Kolmas ja tämän työn kannalta tärkein testi on CSP (Counting Span Task) (Case et al 1979, Case 1980). Tässä testissä lapsille

esitettiin kortteja, joiden vihreät kuviot lasten oli laskettava ääneen. Korteilla oli myös keltaisia kuvioita ehkäisemässä korvaamista. Kortit esitettiin nopeasti peräkkäin pyrkimyksenä ehkäistä päässä kertaamista. Kun lapsi oli laskenut yhden kortin vihreiden kuvioiden määrän, oli hänen ilmoitettava lukumäärä ääneen. Laskettuaan seuraavan kortin kuviot oli hänen ilmoitettava sekä ensimmäisen että toisen kortin kuvioiden lukumäärät siinä järjestyksessä kuin ne oli saatu. Case et al havaitsivat, että kuusivuotiaiden lasten span (eli 'viive') oli keskimääräisesti ottaen kaksi. Toisin sanoen tällaiset lapset osasivat laskea toisen joukon ja antaa lukumäärät molemmille joukoille. Samoin todettiin, että laskemiskokemus vaikutti spaniin. Useiden viikkojen harjoittelun tuloksena neljävuotiaiden span nousi kuusivuotiaiden keskimääräisen spanin tasolle. Tämän ohella Case ilmoittaa, että kyseisessä testissä muistettujen yksiköiden (lukusana) lukumäärät vastasivat Pascual-Leonen (1970) esittämiä normeja konkreettisten operaatioiden spanille. Span todettiin olevan 1 kolmen vuoden iässä, 2 viiden vuoden iässä, 3 seitsemän vuoden iässä ja 4 yhdeksän vuoden iässä.

Aiemmista tarkasteluista on jo mielestäni käynyt ilmi, että suhteet kognitiivisten kehityskykyjen (Piaget-kyvyt) ja tiettyjen matemaattisten käsitteiden välillä ovat pikemmin spesifejä kuin yleisiä. Tämä koskee luultavasti myös spanin kehitystä ja merkitystä matemaattisten käsitteiden oppimiselle. Toisin sanoen pitäisi kehittää matemaattisiin sisältöihin liittyviä span-mittoja, jotta nähtäisiin todella mikä merkitys spanilla on kyseisen sisällön oppimiselle. Täten on myös oletettavaa, että Case'n käyttämät mittarit soveltuvat vain rajatussa määrin matemaattisen ongelmanratkaisun selittämiseen. Esimerkiksi CSP soveltunee objektijoukkojen laskemiseen liittyvien ongelmien selvitykseen. Onhan niin, että laskemisessa tarvitaan yhtäaikaisen informaation käsittelyä. Yksi osa lyhytaikaisen muistin kapasiteetista tarvitaan laskettujen objektien seuraamiseen, yksi osa seuraavaksi laskettavan objektin tarkkailuun, yksi osa tarkkailemaan juuri sanottua lukua ja lopuksi yksi osa tai ehkä yksikkö tarkkailemaan sanottavaa lukusanaa. Mikäli kaikki mainitut skeemat on tarkasteltavissa erillisinä yksikköinä vaaditaan laskemisessa neljän yksikön käsittelykapasiteetti. Case väittää, että

tällaiseen esioperationaaliseen toimintaan mitä laskeminen on, tarvittava neljän yksikön käsittelykapasiteetti saavutetaan noin 4 - 5 vuoden iässä. Tämä selittäisi Case'n mukaan miksi tarkka laskeminen ei ole lujitettavissa ennen 4 vuoden ikää (Case 1980, Gelman & Gallistel 1978).

On mainittava, että Case olettaa lyhytaikaisen/työmuistin olevan vakion. Mittauksissa havaittu informaation käsittelykapasiteetin kasvu selittyisi lähinnä tietylle Piaget'n asteelle luonteenomaisten operaatioiden toimeenpanoon tarvittavan tilan vähenemisenä. Toisin sanoen kasvava tila lyhytaikaisessa muistissa olisi selitettävissä strategioiden määräämien perusoperaatioiden toimeenpanon kontrollointitarpeen vähenemisenä (Case 1980, ss. 20 - 23). Kyseinen väite on mielenkiintoinen, mutta siinä määrin etäinen tämän työn tarkoitusperistä, ettei sitä tässä sen enempää analysoida. Toisaalta ei ole mikään uusi asia, että mitä paremmin yksilö on tutustunut ja harjoittanut jotain (älyllistä) toimintaa, sitä vähemmän huomiota kyseisen operaation toimeenpano vaatii yksilöltä. Tähän toimintojen automatisointiin ja hallintaan ovat esimerkiksi venäläiset psykologit kiinnittäneet huomiota (Galperin 1957).

3. Piaget-kyvyt ja informaation käsittelykapasiteetti

On olemassa kovin vähän tietoa siitä, miten informaation käsittelykapasiteetti liittyy säilyvyyksien, relationaalisten päätelmien ja luokkien inkluusion omaksumiseen. Case'n tutkimus M-voiman ja nesteen säilyvyyden omaksumisen välisestä suhteesta antaa jotain valoa kyseiseen ongelmaan (Case 1977, 1980). Case'n mukaan on neljä skeemaa, jotka on koordinoitava säilyvyysongelmassa: (1) toimeenpaneva skeema, joka aiheuttaa yleisen suunnitelman kahden objektin suhteelliselle vertailulle: "tee kaksidimensionaalinen tutkimus jokaiselle objektille", (2) alkuperäisen ekvivalenssin toteamisen skeema, (3) toisen nestemäärän siirtämisen uuteen astiaan skeema ja (4) kvantiteetin identiteettiä esittävä skeema. Täten M-voima, joka tarvitaan ongelman ratkaisuun olisi e+3. Harjoittelun kautta on yhdistettävissä skeemat (2) ja (3).

Harjoittelu voi toisin sanoen vähentää muistipaineita arvosta e+3 arvoon e+2. Toisaalta on oletettu, että harjoittelulla ei päästä arvoon e+1. Tämä oletus johtuu yksinkertaisesti siitä, että M-voima e+1 on riittämätön kahden skeeman kytkemiseksi yhteen ('chunking'). Case'n kyseiseen harjoittelututkimukseen osallistui 63 ei-säilyttäjää. M-voima mitattiin BDS testillä. Tulokset olivat odotettuja. Konfliktiharjoitteluun osallistuneista e+1 -voiman omaavista lapsista (7 lasta) kukaan ei oppinut säilyttämään. Toisaalta niistä lapsista, joiden M-voima oli e+2, 12/41 oppi säilyttämään ja 9 lasta oli siirtofaasissa. Lopuksi lapsista, joiden estimoitu M-voima oli e+3, 5 lasta saavutti säilyvyystason ja yksi siirtofaasin.

Case selittää tulokset seuraavasti. Ryhmän e+1 epäonnistuminen johtui siitä, että heidän M-voimansa ei ollut riittävän suuri keskittymään molempiin dimensioihin yhtäaikaa. Toisin sanoen nämä lapset estyivät Case'n mukaan näkemästä konflikteja, joita harjoittelu toi esille. Ryhmän e+2 epätäydellinen suoritus johtui siitä, että sopivan toimeenpanevan skeeman hankinta ei ole riittävä säilyvyysprosessin hankinnalle. Tarvitaan normaalisti kolmen skeeman koordinointia joka vaatii M-voimaa e+3 kuten edellä todettiin. Lopuksi e+3 ryhmän suoritus osoittaa Case'n mukaan, että tämän tason M-voima on riittävää säilyvyysprosessin hankinnalle.

Siitä missä määrin M-voima rajoittaa esimerkiksi transitiivipäätelmiä, ei ole pätevää tietoa. Sama koskee osittain lukujonoja laskutaitoja, joita tarkastelen seuraavissa luvuissa.

IV B INFORMAATION KÄSITTELYKAPASITEETIN (IPC) KOKEELLINEN NÄKÖKULMA

Kokeellisessa osassa pyritään operationalisoimaan IPC-kyky lukujono-, laskemis ja mittalukuyhteyksissä. Tarkoituksena on pilottiluontoisesti kehittää sisältö-spesifejä mittoja IPC-kyvylle sekä vertailla näitä mittoja toisiinsa. Pääongelmia esitetään kolme kappaletta:

A. Missä määrin sisältö-spesifit IPC-mitat korreloivat keskenään?

B. Mikä on IPC-mittojen selitysvoima Piaget-kykyjen hankinnalle?

C. Mikä on IPC-mittojen selitysvoima Piaget-mittoihin nähden ja kääntäen?

Ensimmäiseen ongelmaan etsitään vastausta korrelaatioiden avulla. Toisen ongelman tarkasteluun käytetään IPC-kykyryhmien suorituserotestejä. Kolmanteen ongelmaan pyritään vastaamaan regressioanalyysin avulla. Seuraavassa on aluksi yleisiä huomioita käytetyistä mittareista sekä niihin liittyviä luotettavuusongelmia.

1. Yleisiä huomioita IPC-mittareista

IPC-mittarit on kehitetty pitäen mielessä eräitä perusvaatimuksia. Ensinnäkin mittareiden pitäisi vastata työssä tutkittavia ongelmanratkaisusisältöjä. Täten päädyttiin neljään mittaan, joista kahta mittaa käytetään lukujonotaitojen IPC-kyvyn selvittämiseen. Toiset kaksi mittaa suunniteltiin lukumäärän määritys- ja mittalukusisältöjä varten. Kaikkien mittojen suunnittelun lähtökohtana oli Case'n CSP-mitta (Case et al 1979, 1980a). Itse asiassa tämän työn laskemissisältöön liittyvä IPC-mitta (CSP) sekä mittaamissisältöön liittyvä (MEASP) ovat suoria sovellutuksia Case'n ideasta (ks. liite IV 1). Toisaalta lukujonotaitoihin liittyvä (ESP(O)) mitta on rakenteellisesti samankaltainen (CSP) ja (MEASP) mittojen kanssa. Kaikissa näissä testeissä lapselle annetaan yksi kerrallaan laskettava, "mitattava" tai lueteltava kohde. Kun lapsi on operoinut, annetaan seuraava kohde ja edellisen prosessin tulos on pidettävä mielessä samaan aikaan. Mikäli lapsi

onnistuu operoimaan ja ilmoittamaan operointinsa päätteeksi oikein yhtäaikaisesti mielessä pitämänsä tuotteet, saa hän seuraavan kohteen. Näin jatketaan kunnes oikealle operoinnille ja muistamiselle "tulee raja vastaan". Toinen lukujonotaitoihin liittyvä mittari (ESP(S)) poikkeaa jonkin verran edellä mainituista mitoista. Tässä annetaan etukäteen kaikki yhtäaikaisesti lyhytaikaisessa muistissa pidettävät lukusanat. Suurin rasitus informaation käsittelykapasiteettiin kohdistuu näissä tehtävissä (10 kappaletta) ensimmäisen vaiheen luetteluun. Tällöinhän henkilön on kyettävä pitämään mielessä kaikki mainitut lukusanat ja "laskettava" niistä ensiksimainittuun. Tämä testi on ilmeisesti lähinnä Case'n käyttämää BDS-testiä (esim. Case 1974, 1977). Toisaalta tässä työssä käytettävä (ESP(S))-testi vastannee paremmin todellisia lukujonosisältöjen ongelmanratkaisua kuin BDS-testi. Tämä johtuu siitä, että BDS-testissä kahden tai kolmen lukusanan luettelu päinvastaiseen suuntaan vie kovin lyhyen ajan. Toisaalta kyseinen testi liittynee läheisesti taaksepäin lukujonotaitoihin, joita ei teorian yhteydessä mainituissa tutkimuksissa ole ilmeisesti kontrolloitu. Tämän ohella Hiebertin työ viittaa siihen, että BDS-testi ei ole ehkä pätevä pitempiaikaisen muistirasituksen mitta (Hiebert 1981).

Millaiselta lukualueelta tehtävät pitäisi valita? Millä periaatteella kunkin tehtävän muistettavat yksiköt valitaan? Näihin kysymyksiin löytyy osin vastauksia aiemmista töistä. Yleisperiaatteena aiemmissa kuin tässäkin työssä on, että muistettavat yksiköt valitaan satunnaisesti tietyltä lukualueelta. Toisaalta pidetään mielessä, että pyritään välttämään saman yksikön toistumista kunkin testin sisällä. Lukualueen valintaan on kiinnitetty aiemmin kovin vähän huomiota. Tässä työssä yksiköt valittiin lapsen sujuvan luettelun alueelta. Tämä saatiin esille lukujonotaitojen testissä (luku V). Miten sitten saataisiin kunkin sisältöalueen tehtävät vastaamaan toisiaan muistiyksiköiden järjestyksen ja koon suhteen? Tässä työssä yritettiin tätä osaa vakioida laatimalla yksiköiden kokoon ja järjestykseen nähden samankaltaisia tehtäviä eri sisältöjen välille. Miten sitten lapset saataisiin tasavertaiseen lähtötilanteeseen IPC-testien ensimmäisten osioiden osalta? Tätä varten kunkin testin

ensimmäistä osiota edelsi lyhyt tutustuminen tehtävätyyppiin. Esimerkiksi testissä (CPS) lapselle annettiin kortti, jossa oli keltaisia ja punaisia ympyröitä. Lasta pyydettiin laskemaan kuinka monta punaista ympyrää lapussa oli (4 ympyrää) ja pitämään mielessä saamansa luku. Toisessa lapussa oli 5 punaista ympyrää ja lapsi laski nämä. Lasta pyydettiin ilmoittamaan nyt molemmat tulokset. Lopuksi annettiin kortti, jossa oli 3 punaista ympyrää. Lapsi laski ja ilmoitti kaikki kolme lukua. Tämän jälkeen annettiin ensimmäinen varsinainen tehtävä. Todettakoon, että edellä mainittu "pienien lukujen harjoittelusysteemi" onnistui näkemykseni mukaan hyvin. Ainakaan kukaan lapsista ei osoittanut merkkejä siitä, etteikö systeemiä olisi ymmärretty. Miten sitten lapsen keskittymiskyky saataisiin pysymään vireänä ja miten lapsi saataisiin yrittämään parastaan? Nämä ovat vielä kaksi oleellista kysymystä, jotka vaikuttavat oletettavasti IPC-kyvyn mittauksen luotettavuuteen. Jo yhden tehtävän korkeatasoinen suoritus vaatii melkoisen ponnistuksen. Toisaalta Case'n työt viittaavat siihen,että joillakin lapsilla on tapana käyttää IPC-kykyään vain "puolinaisesti" (Case 1977, ks. oppimistyylit/ kenttäsidonnaisuus; Leino & Leino 1982).

2. IPC-mittarit; luotettavuusongelmia

Tarkastelen IPC-mittareita siinä järjestyksessä kuin ne esitettiin koulutulokkaille. Ensinnä on vuorossa ESP(0) (Enumeration SPan in successive Order). Tässä mittarissa on viisi osiota (liite IV 1). Suoritusprosessia kussakin tehtävässä voidaan kuvata seuraavasti: $x_1 \rightarrow Ex_1 \rightarrow Rx_1 \rightarrow x_2 \rightarrow Ex_2 \rightarrow S(x_1,x_2) \rightarrow R(x_1,x_2) \rightarrow \ldots \rightarrow S(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$, missä E = enumerate to, R = remember, S = say ja $x_i \leqq 23$, $x_i \neq x_j$, kun $i \neq j$. Toisena mittarina lukujonotaitoihin liittyen on ESP(S) (Enumeration SPan in simultaneous system). Testin ESP(S) osioita on 10 kappaletta. Suoritusprosessia voidaan kuvata seuraavasti:
$(x_1,\ldots,x_k) \rightarrow R(x_1,\ldots,x_k) \rightarrow Ex_1$ ja $R(x_2,\ldots,x_k) \rightarrow \ldots \rightarrow Ex_k$, missä $k \leqq 4$. Tehtäviä, joissa k=2, on 4, k=3, on 4 ja k=4 on 2.

Kolmantena mittarina on CSP (Counting SPan). Tässä testissä on kolme osiota, joiden suoritusprosessi on ESP(0)-testin prosessia vastaava. Ainut ero on siinä, että nyt lapsi joutuu laskemaan korteilta punaisten "pallojen" lukumäärän. Pallot ovat kortilla random järjestyksessä. Tämän ohella kortilla on myös keltaisia palloja ehkäisemässä korvaamista. Lapsen on osoitettava sormellaan jokaista laskemaansa palloa.

Neljäntenä mittarina on MEASP (Measuring SPan), jonka kolmen osion suoritusprosessi vastaa CSP-testin osioiden suoritusprosessia. Tässä on se ero, että lapsi joutuu "mittaamaan" kuinka monta mittaluiskaa (pituus 3 cm) sisältyy mitattavaan luiskaan.

Testeissä ESP(0), CSP ja MEASP kunkin osion span on n ($n \leqq 6$), mikäli koehenkilö pääsee tasolle $S(x_1,\ldots,x_n)$. Testissä ESP(S) määräytyy kunkin osion span suoraan k arvon mukaan. Taulukossa IV 1 on esitetty prosenttijakaumat span-arvoille testeissä ESP(0), CSP ja MEASP.

Taulukko IV 1. Span-lukujen prosenttijakaumat testeissä ESP(0), CSP ja MEASP sekä osioiden suhteelliset suoritusprosentit

	ESP(0)					CSP			MEASP		
	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3
0	6	6	6	11	23	20	9	0	6	17	0
1	14	20	34	40	40	46	34	21	14	29	14
2	14	34	20	17	22	25	37	31	63	37	37
3	26	14	31	6	9	9	14	31	9	14	34
4	20	11	3	6	6	0	3	11	6	3	9
5	11	6	3	14	0	0	3	0	0	0	3
6	9	9	3	6	0	0	0	6	3	0	3
suht.%	51	43	35	37	22	20	30	43	34	26	43

Taulukosta IV 1 havaitaan, että CSP ja MEASP-testit ovat vaikeampia kuin ESP(0)-testi. Tämän ohella ESP(0)-testin osioiden suorituksissa havaitaan keskimääräisen span-prosentin laskua. Tämä selittynee lähinnä väsymisestä käyttää täydellä teholla IPC-kykyä. Tehtävissä ESP(0)1 ja 2 lähes 80 % lapsista on span vähintäin 2. Tämä on yhdenmukaista teoriaosassa todettujen

span-arvojen kanssa. Myös tehtävissä CSP3 ja MEASP1 ja 3 on lähes sama tilanne. Tehtävät CSP3 ja MEASP3 ovat sikäli mielenkiintoisia, että näissä oli mahdollisuus käyttää systeemiä, mikäli huomaa ja osaa. Itse asiassa vain yksi koulutulokas huomasi tämän ja osasi käyttää sitä hyväksi. Korkeat suoritusprosentit näissä tehtävissä muihin kyseisten testien osioihin nähden johtunevat lähinnä siitä, että CSP3 ja MEASP3 tehtävissä kaksi ensimmäistä muistettavaa lukua ovat alle kymmenen. Tällöin laskeminen tai "mittaaminen" tapahtui nopeasti ja luvut on suhteellisen helppo muistaa. Tätä ajatusta tukee tehtävän MEASP1 suoritusprosentit. Tässä tehtävässä kaksi ensimmäistä lukua olivat myös alle kymmenen (ks. span 2/63 %/MEASP1).

Taulukossa IV 2 on esitetty ESP(S)-testin suoritusprosentit kunkin osiossa. Suluissa on luvut, joihin asti piti luetella.

Taulukko IV 2. ESP(S)-testin kunkin osion suoritusprosentit; tehtävät ovat vaikeusjärjestyksessä (N=35)

ESP(15,8)	ESP(9,16)	ESP(18,11)	ESP(12,17)	ESP(8,10,12)	ESP(9,14,8)
60	57	54	49	40	31

ESP(11,9,7)	ESP(8,17,13)	ESP(7,5,18,14)	ESP(6,9,12,15)
23	9	9	3

Taulukosta IV 2 on ensinnäkin havaittavissa se "negatiivinen" seikka, että vain yhdestä kolmeen koulutulokasta kykeni span-4 tehtävien suoritukseen. Toisaalta enemmistö koulutulokkaista kykeni kahden spanin tehtävien suoritukseen, kun toinen muistettavista luvuista oli alle kymmenen. Mikäli molemmat muistettavat luvut ovat yli kymmenen, laskevat suoritusprosentit hiveneen. Kuten huomataan oli kolmessa tehtävässä systeemi-mahdollisuus. Kuitenkin vain kaksi oppilasta huomasi tämän ja kykeni eksplisiittisesti käyttämään sitä hyväksi.

Miten on kyseisten testien luotettavuuden laita? Kaikkein luotettavimmaksi laskettujen reliabiliteettilukujen avulla nousee viimeksi tarkasteltu ESP(S)-testi. Puolitusmenetelmällä laskettu reliabiliteettiarvo on 0.79. Tämä vastaa BDS-testin vastaavia

arvoja (Case 1972, Case & Globerson 1974). Muissa testeissä reliabiliteettiarvot jäävät alle tason 0.50. Tämä ei ole sikäli mikään yllätys, koska näiden tehtävien suoritukseen vaikuttaa kovin monet tekijät, joihin tutustuttiin edellisessä kappaleessa. Toisaalta tätä vaikeusastevaihtelua voidaan "lieventää" luokittelemalla havaitut suoritukset sopivasti. Tästä seuraavassa.

3. IPC-kykyjen luokittelu

Testien ESP(0), CSP ja MEASP suoritukset luokitellaan kahdella tavalla. Toinen luokitus perustetaan span-tyyppiarvoon. Toinen perustetaan maksimisuoritukseen. Tarkastellaan aluksi ensin mainittua luokittelua. Span-tyyppiarvoihin perustuvat tasot määrättiin seuraavasti:

0-taso, kun span-moodi (kussakin sisällössä) jää alle arvon 2;
1-taso, kun span-moodi on 2 tai 3, missä "tai" on looginen disjunktio;
2-taso, kun span-moodi on 4 tai 5;
3-taso, kun span-moodi on 6.

Mikäli span-frekvenssit menivät tasan (8 lasta ESP(0)-testissä, 3 lasta CSP-testissä ja MEASP-testissä) määräsi tyyppiarvon se kumpaa span-arvoa lähempänä laskettu keskiarvo oli. Esimerkiksi, jos ESP(0)-arvot olivat 3,3,1,1,0, joutui lapsi luokkaan 1, koska keskiarvo on $1,6 \approx 2$.

Maksimisuorituksiin perustuvat tasot ovat seuraavat:

0-taso, kun max (testisuoritus) jää alle arvon 2;
1-taso, kun max (testisuoritus) on 2 tai 3;
2-taso, kun max (testisuoritus) on 4 tai 5;
3-taso, kun max (t.s.) = 6.

Testin ESP(S) suoritukset luokiteltiin seuraavasti:

0-taso, kun ei pääse seuraavalle tasolle;
1-taso, kun kahden yksikön tehtävistä on vähintäin puolet oikein;
2-taso, kun edellinen taso saavutettu ja lisäksi ainakin puolet kolmen yksikön tehtävistä on oikein;
3-taso, kun edellisten tasojen vaatimukset kunnossa, ja ainakin toinen neljän yksikön tehtävistä on suoritettu oikein.

Testin ESP(S) tasot muodostavat täydellisen hierarkian siinä mielessä, että ei ollut yhtään koehenkilöä, joka olisi osannut

korkeammat span-arvon tehtävistä puolet vaan ei edellisten span-arvojen tehtävistä puolia.

Edellä oleviin luokitteluihin liittyviä IPC-muuttujia merkitään seuraavasti: ESP(0), $ESP_m(0)$; CSP, CSP_m; MEASP, $MEASP_m$; ESP(S), $ESP_m(S)$ ja ESP. Tässä alaindeksi m viittaa maksimisuoritusluokitteluun. Muuttuja ESP on ESP(S) tehtävien summamuuttuja, jonka arvot vaihtelevat välillä 0 - 10. Taulukossa IV 3 on esitetty kunkin IPC-muuttujan prosentuaaliset jakaumat.

Taulukko IV 3. IPC-muuttujien prosentuaaliset jakaumat (N=35)

	ESP(0)	$ESP_m(0)$	CSP	CSP_m	MEASP	$MEASP_m$	ESP(S)	$ESP_m(S)$
0-taso	26	3	40	11	23	0	23	14
1-taso	54	37	60	66	74	77	46	40
2-taso	14	43	0	17	6	17	20	34
3-taso	6	17	0	6	0	6	11	11

Taulukossa IV 3 on lähinnä uutta aiempiin tarkasteluihin verrattuna maksimisuorituksiin perustuvat jakaumat $ESP_m(0)$, CSP_m, $MEASP_m$ ja $ESP_m(S)$. Havaitaan, että suurimmalla osalla (86 % - 100 %) koulutulokkaita on maksimisuoritus-span vähintäin 2 (1-taso). Tämä on yhdenmukaista Case'n ja Pascual-Leonen tutkimustulosten kanssa (Case 1972, Pascual-Leone 1970). Se, miten toiminnon automaatioaste vaikuttaa IPC-kykyyn on myös nähtävissä karkeasti ottaen taulukosta IV 3. CSP-osiot olivat operaation oikeellisuuden näkökulmasta merkittävästi vaikeampia kuin ESP(0), MEASP ja ESP(S) osiot. Sellaisia koehenkilöitä, joilla ei ollut yhtään operaatiovirhettä CSP osioissa, oli 7 kappaletta eli 20 %. Vastaavat luvut ESP(0), MEASP ja ESP(S) tehtävissä ovat 31, 32 ja 29 eli prosenteissa 89 %, 91 % ja 83 %. CSP-operaatioiden oikeellisuuserot muihin IPC-muuttujiin nähden ovat erittäin merkitsevät. Tästä laskemisoperaation vaivalloisuudesta, jota oikeellisuusprosentit kuvaavat, johtunee CSP-muuttujan taulukosta IV 3 näkyvä prosenttijakauma. Lapsilla ei ollut selvää strategiaa miten laskisi kunkin kortin punaisten pallojen lukumäärän. Joutuessaan keskittymään siihen mitä oli jo laskettu ja mitä laskematta, unohtui ilmeisesti helpommin muistettavat luvut. Mittaustilanteissa näin hankalaa tilannetta ei päässyt syntymään, koska

tässä mittaluvun määritys tapahtui yksiköiden jonoyhteydessä. Toisaalta myös MEASP-tilanteessa vaadittiin lapselta suurempaa keskittymistä itse operaatioon. Tästä oli ilmeisenä seurauksena samankaltainen jakauma MEASP-muuttujan sarakkeessa kuin CSP-muuttujan sarakkeessa. Tähän mielenkiintoiseen ja tärkeään toimintojen automatisaatioon ja IPC-kyvyn väliseen ongelmaan ei tässä ole mahdollisuus tämän tarkemmin puuttua. Siinä on yksi jatkotutkimuskohde. Miten sitten spesifit IPC-mitat korreloivat keskenään? Siitä seuraavassa.

4. Missä määrin spesifit IPC-mitat korreloivat keskenään?

Taulukossa IV 4. on esitetty spesifien IPC-muuttujien korrelaatiot.

Taulukko IV 4. IPC-mittojen korrelaatiot (N=35)

	ESP(0)	$ESP_m(0)$	CSP	CSP_m	MEASP	$MEASP_m$	ESP(S)	$ESP_m(S)$	ESP
ESP(0)		.52**	.22	.36*	.08	.32	.48**	.50**	.51**
$ESP_m(0)$			.10	.19	.18	.18	.43**	.46**	.33*
CSP				.45**	.53***	.31	.27	.27	.36*
CSP_m					.37*	.46**	.26	.30	.34*
MEASP						.33*	.31	.35*	.31
$MEASP_m$							.44**	.39*	.41*
ESP(S)								.90***	.94***
$ESP_m(S)$									.88***

*** $p < .001$ ** $p < .01$ * $p < .05$

Taulukosta IV 4 havaitaan, että varsin luotettaviksi todetut ESP(S)-mitat korreloivat erittäin merkitsevästi. Myös ESP(0)-mitat korreloivat erittäin merkitsevästi keskenään sekä merkitsevästi ESP(S)-mittojen kanssa. Tämä lisää nähdäkseni suoritetun luokittelun luotettavuutta myös ESP(0)-mittojen ESP(0) ja $ESP_m(0)$ osalta.

Kuten edellä olevien prosenttianalyysien perusteella oli jo alustavasti nähtävissä, korreloivat lukumäärien ja mittalukujen määritykseen liittyvät mitat merkitsevästi keskenään. Toisaalta lukujen luetteluun liittyvät IPC-mitat eivät korreloi systemaattisesti edellä mainittujen IPC-mittojen kanssa. Poikkeuksen

muodostaa maksimisuorituksiin liittyvät CSP_m- ja $MEASP_m$-mitat. Täten korrelaatioanalyysinkin näkökulmasta tulee esiin IPC-kyvyn riippuvuus spesifistä sisällöstä.

5. Mikä on spesifien IPC-kykyjen merkitys Piaget-kykyjen hankkimiselle?

Kiinnostavinta on vertailla niitä lapsia, joiden IPC = 0 niihin lapsiin, joiden IPC > 0. Tämä on suoritettu taulukossa IV 5 mittojen ESP(0), ESP(S), CSP ja MEASP avulla.

Taulukko IV 5. Ryhmien IPC = 0 ja IPC > 0 suorituserot Piaget-kykyjen suhteen, kun IPC on ESP(0), ESP(S), CSP tai MEASP. Keskiarvojen merkitsevyyserot on määrätty t-testillä.

	TR	SUBS	SER	IN	LC	TTR	TSUBS	TIN	TNC	TEJEC	TLC
ESP(0)=0 (9)	3.44	3.00	2.00	3.00	0.22	4.78	3.67	4.89	2.78	3.89	1.11
ESP(0)>0 (26)	3.88*	2.96	1.96	2.81	1.00	6.85**	5.19**	5.27	3.04	5.58	2.50'
ESP(S)=0 (7)	3.57	3.00	2.00	3.00	0.00	5.14	3.86	5.00	2.71	3.43	0.86
ESP(S)>0 (28)	3.82	2.96	1.96	2.82	1.00	6.61**	5.04*	5.21	3.04	5.57'	2.46'
CSP =0 (14)	3.64	2.93	2.00	2.79	0.64	5.86	4.50	4.79	2.64	3.93	1.93
CSP >0 (21)	3.86	3.00	1.95	2.91	0.90	6.62	5.00	5.43	3.19	5.95*	2.29
MEASP =0 (8)	3.38	3.00	2.00	2.75	0.75	5.25	4.38	4.38	2.00	1.63	1.75
MEASP >0 (27)	3.89**	2.96	1.96	2.89	0.81	6.63'	4.93	5.41'	3.26**	6.19***	2.26

*** $p < .001$ ** $p < .01$ * $p < .05$ ' $p < .10$

Yleisenä huomiona voidaan todeta, että ryhmä IPC=0 suoriutuu heikommin Piaget-tyyppisistä tehtävistä kuin ryhmä IPC > 0. Tämän ohella suoritusten oikeellisuuteen liittyvissä Piaget-muuttujissa ei yleensä havaita merkitseviä eroja. Poikkeuksen muodostaa TR-muuttuja. Toisaalta tiedostamiseen liittyvissä Piaget-muuttujissa havaitaan merkitseviä suorituseroja. Lukujonosisältöön liittyvät ESP(0)- ja ESP(S)-ryhmät eroavat merkitsevästi TTR- ja TSUBS-muuttujien kohdalla. Vastaava tilanne on säilyvyyskyvyissä TNC ja TEJEC, kun tarkastellaan CSP- ja MEASP-ryhmien eroja. Nämä tulokset ovat yhtenmukaisia Case'n ja Pascual-Leonen tutkimusten

kanssa (Case 1977, 1980, Pascual-Leone 1970). Toisin sanoen ne lapset, joiden IPC-span jää normaalisti alle arvon 2 (IPC=0 ryhmät), ilmeisesti kykenevät tarkastelemaan TTR, TSUBS ja TEJEC tilanteita vain yhdestä dimensiosta. Tästä on loogisesti ajatellen seurauksena vaikeuksia niissä Piaget-tyyppisissä tehtävissä, joissa tarvitaan kahden skeeman yhdistelyä tietoisella tasolla. Tähän viittaavat myös ESP-muuttujan tulokset. Lapset jaettiin ESP-muuttujan suhteen 4 ryhmään: ryhmä 1 (5 lasta), ESP=0; ryhmä 2 (8 lasta), ESP=1 tai 2; ryhmä 3 (13 lasta), ESP= 3 tai 4; ryhmä 4 (9 lasta), ESP=5. Ryhmän 1 suoritukset erosivat tilastollisesti muiden ryhmien suorituksista muuttujilla TTR ja TSUBS. Erot olivat melkein merkitsevästä erittäin merkitsevään kasvaen mentäessä ryhmän 4 suuntaan. Myös muuttujalla TIN havaittiin melkein merkitsevä ero ryhmien 1 ja 4 välillä. Toisaalta ryhmien 2 - 4 erot Piaget-muuttujilla olivat kovin vähäisiä. Poikkeuksen muodostaa muuttuja TSUBS, jolla havaitaan melkein merkitsevä ero ryhmien 3 ja 4 välillä. Kokeeksi vertailtiin myös eroja ryhmien IPC < 2 ja IPC > 1 välillä, kun IPC on ESP(0), $ESP_m(0)$, ESP(S), $ESP_m(S)$, CSP_m tai $MEASP_m$. Mitään tilastollisesti merkitseviä eroja ei havaittu; t-arvot olivat yleensä alle 1.00-tason.

Suoritettujen analyysien perusteella on odotettavissa, että kovin korkeisiin selitysosuuksiin ei päästä, kun IPC-mitoilla selitetään Piaget-osioissa selviytymistä. Tästä tarkemmin seuraavassa.

6. Missä määrin IPC-kyvyt selittävät Piaget-kykyjä ja kääntäen?

Otsikon kysymykseen etsitään vastausta valikoivan regressiomallin (stepwise selective regression analysis) avulla. Tässä työssä tullaan käyttämään selittävien muuttujien mallin valinnassa seuraavia kriteerejä. Ensinnäkin jokaisella jatkoaskeleella otetaan selittävien muuttujien joukosta mukaan se, joka lisää vielä selittämätöntä vaihtelua eniten. Regressiomalliksi valitaan se, jonka kaikki muuttujat lisäävät selitysosuutta vähintäinkin melkein merkitsevällä t-tasolla (5 %). Tämän ohella multippelikorrelaatioon liittyvän F-arvon on oltava myöskin vähintäin 5 % tasolla.

Taulukossa IV 6 on esitetty eräiden Piaget-muuttujien ja IPC-muuttujien väliset korrelaatiot. Katso sisäiset korrelaatiot; taulukot III 2 ja IV 4.

Taulukko IV 6. Piaget- ja IPC-muuttujien korrelaatiot (N=35)

	ESP(0)	$ESP_m(0)$	CSP	CSP_m	MEASP	$MEASP_m$	ESP(S)	$ESP_m(S)$	ESP
TTR	39*	27	21	33*	31	-06	30	40*	36*
TSUBS	26	22	18	39*	20	-04	34*	35*	37*
TIN	19	-01	24	12	33*	13	21	21	28
TNC	21	13	25	24	51*	21	13	11	19
TEJEC	19	32	36*	27	65*	14	26	18	24
TLC	22	36*	09	06	15	14	24	13	26
SSER	23	06	02	-02	13	-06	19	13	18
TR	37*	23	22	20	43*	-08	12	23	18

*$p < .05$

Kuten jo edellisen kappaleen analyysien perusteella oli nähtävissä Piaget-kyvyt ja IPC-kyvyt eivät ole kovin vahvassa riippuvuussuhteessa toisiinsa. Kuinka hyvin spesifit IPC-kyvyt pystyvät ennakoimaan suorituksia Piaget-tyyppisissä tehtävissä nähdään regressioanalyysin avulla (taulukko IV 7). Taulukon IV 7 selittävien muuttujien kertoimet ovat β-kertoimia. Prediktorit on listattu yhtälöön siinä järjestyksessä, kuin ne on malliin valikoituneet. Tätä periaatetta tullaan noudattamaan kaikissa jatkoanalyyseissä.

Taulukko IV 7. Piaget-kykyjen regressiomalli. Selittäjinä IPC-kyvyt (N=35). Kertoimet β-arvoja

Selitettävät Piaget-kyvyt	Selittäjinä ESP(0), $ESP_m(0)$, CSP, CSP_m, MEASP, $MEASP_m$, ESP(S), $ESP_m(S)$ ja ESP	R^2(%)
TTR	= 0.44 $ESP_m(S)$ - 0.41 $MEASP_m$ + 0.38 CSP_m	32
TSUBS	= 0.44 CSP_m + 0.38 ESP - 0.39 $MEASP_m$	32
TIN	= 0.33 MEASP	11
TNC	= 0.51 MEASP	26
TEJEC	= 0.68 MEASP + 0.35$ESP_m(0)$-0.69$ESP_m(S)$+0.52ESP	57
SSER	ei riittävää F-arvoa	-
TR	= 0.52 MEASP + 0.46 ESP(0) - 0.39 $MEASP_m$	43

$p < .05$

Parhaaksi yksittäiseksi selittäjäksi Piaget-kyvyille osoittautuu MEASP-kyky. Tämä oli itse asiassa nähtävissä jo aiemmista analyyseistä. Samoin oli nähtävissä, että TTR-, TSUBS- ja TEJEC-kyvyt ovat läheisemmässä yhteydessä IPC-kykyihin kuin muut Piaget-kyvyt. Erityisesti TEJEC-kyky näyttää olevan vahvassa yhteydessä IPC-kykyihin. Kaikki nämä tulokset ovat loogisesta näkökulmasta näntynä järkeviä ja yhdenmukaisia aiempien tutkimusten kanssa. Mainittakoon, että myös N-, SER- ja LC-muuttujien vaihtelua selitettiin IPC-muuttujilla. Koska selitysosuudet jäivät selvästi alle 5 %-tason, ei tuloksia taulukoitu. Tästä lähtien tullaankin käyttämään vain tiedostamiseen perustuvia Piaget-muuttujia selittäjinä ja selitettävinä.

Taulukko IV 8. IPC-kykyjen regressiomalli. Selittäjinä Piaget-kyvyt (N=35)

Selitettävä		Selittäjät TTR, TSUBS, TIN, TNC, TEJEC ja TLC	R^2(%)
ESP(0)	=	0.39 TTR	15
ESP_m(0)	=	0.36 TLC	13
CSP	=	0.36 TEJEC	13
CSP_m	=	0.39 TSUBS	15
MEASP	=	0.71 TEJEC - 0.34 TLC + 0.30 TNC	57
$MEASP_m$		ei riittävää F-arvoa	-
ESP(S)	=	0.33 TSUBS	11
ESP_m(S)	=	0.39 TTR	16
ESP	=	0.37 TSUBS	13

$p < .05$

Kuten ennakoitua kykenevät Piaget-kyvyt selittämään kovin pienen osan IPC-kykyjen vaihtelusta. Poikkeuksen muodostaa MEASP-kyky, jota säilyvyyskyvyt selittävät 57 % voimalla.

Yhteenvetona voidaan todeta, että IPC-kyvyt ovat suurelti sisältöön sidottuja. Niillä näyttäisi olevan merkitystä niiden Piaget-kykyjen hankkimiselle, joissa tarvitsee yhdistää vähintäinkin kaksi skeemaa tiedollisella tasolla (TTR, TSUBS ja TEJEC). Viimeksimainitulta osin tulokset ovat Case'n esittämien ajatusten mukaisia (Case 1977, 1980). Kääntäen voidaan todeta, että Piaget-kyvyt kykenevät selittämään kovin pienen osan IPC-kykyjen vaihtelusta poikkeuksena MEASP-span.

V A LUKUJONOTAIDOT JA LASKEMINEN

Lukusanat yksi, kaksi, kolme etc. ovat lukukäsitteen kehittymisen ja kehittämisen kielellinen ja sosiaalinen perusta. Lukujonotaidot viittaavat tässä työssä lukusanojen jonon eri sanojen differentiaatioon ja näiden sanojen relaatioiden konstruktioon. Toisin sanoen kun lukusanat tuotetaan standardijärjestyksessä ja ei viitata välttämättä mihinkään ulkoisiin objekteihin, on kysymys lukujonotaidoista. Aiempien tutkimusten perusteella on syytä olettaa, että lukusanat muodostavat aluksi suhteellisen merkityksettömän ja irrallisen jonon kvantitatiivisista toiminnoista. Myöhemmin lukusanat tuotetaan helpommin ja pidemmälle ja niistä tulee ajattelun kohteita. Lukusanojen jonoa opitaan käyttämään vähin erin esittävänä perustana kvantitatiivisille toiminnoille ja tätä kautta lukusanat ja niiden väliset suhteet saavuttavat syvemmän merkityksen (Fuson & Hall 1982, Fuson et al 1982, Keranto 1979, 1981, Vygotsky 1962).

Aiempien tutkimusten perusteella lukusanojen standardijonon hankkiminen (luvut yhdestä sataan) alkaa noin kahden vuoden iässä ja päättyy noin kuudesta seitsemään vuoden iässä (Gelman & Gallistel 1978). Tämän standardijärjestyksen hankkimisikä on kovin vaihteleva ja kehityksen alussa on havaittu lukujonon luettelussa kolme osaa: standardisuhde, vakaa ei-standardi suhde ja "epämääräinen" suhde (Fuson 1980, Keranto 1981).

Fuson raportoi, että yhdysvaltalaisten kaupunkilasten keskimääräiset lukujonon tarkan luettelon pituudet kasvoivat 13 lukusanasta 51 lukusanaan ikävälillä 4 - 6 vuotta. Näiden lasten tuottamat standardijonot osoittivat, että he tunsivat peruslukujen yhdestä yhdeksään kertautumisen kymmenten sisällä, mutta osa heistä ei ollut ratkaissut vielä kymmenjärjestelmän ongelmaa. Toisin sanoen lapsilla oli huomattavia vaikeuksia siirtyä toiselta kymmeneltä kolmannelle kymmenelle tai kolmannelta kymmeneltä neljännelle kymmenelle. Mikäli lapsi etenee tarkasti neljännelle kymmenelle, on tämä viite kymmenongelman ratkaisusta lukujonoyhteydessä (Fuson & Hall 1982, Keranto 1981).

1. Keskeiset lukujonotaidot

Täytyy palauttaa mieliin, että tämän työn yksi keskeinen päämäärä on selittää aritmeettisissa laskutoimituksissa selviytymistä. Tällöin tulee eittämättä mieleen kysymys mitkä ovat ne spesifimmät lukujonotaidot, joita lapset tarvitsevat selviytyäkseen keskeisistä yhteen- ja vähennyslaskutyypeistä. Suoritetun loogisen analyysin ja aiempien tutkimusten perusteella päädyin seuraaviin keskeisinä pidettäviin lukujonotaitoihin (Fuson & Hall 1982, Fuson et al 1982, Keranto 1981). Suluissa on käytetty lyhenne.

I	Sujuva ja tarkka luettelu	(ENUM, enumeration)
II	Ylöspäin luettelu lähtien tietystä luvusta	(UP, "count" up from x)
III	Ykkösestä tiettyyn lukuun luettelu	(TO, "count" up to x)
IV	Taaksepäin luettelu alkaen tietystä luvusta päätyen lukuun 1	(DO, "count" down from x)
V	Ylöspäin luettelu tietystä luvusta tiettyyn lukuun	(UPTO, "count" up from x to y)
VI	Alaspäin luettelu tietystä luvusta tiettyyn lukuun	(DOTO, "count" down from y to x)
VII	Ylöspäin luettelu tietystä luvusta tietyn luvun verran	(UPBY, "count" up from x by "N")
VIII	Alaspäin luettelu tietystä luvusta tietyn luvun verran	(DOBY, "count" down from y by "N")
IX	Tietystä luvusta ylöspäin luettelu saman luvun välein	(SABY, "count" up from x by the same number m)
X	Tietyn luvun välittömän seuraajan määritys	(AF, after x)
XI	Tietyn luvun välittömän edeltäjän määritys	(BEF, before y)
XII	Kahden luvun välissä olevien lukujen määritys	(BET, between x and y)
*	Tiettyä lukua tietyn määrän suurempi tai pienempi luku	(BS, "N" bigger/smaller than x)

Mainituista spesifeistä lukujonotaidoista ovat eteenpäin-jonotaitoja ENUM, UP, TO, UPTO, UPBY ja SABY sekä taaksepäin-jonotaitoja DO, DOTO ja DOBY. On oletettavaa, että AF-taidot liittyvät läheisesti UP-taitoihin ja BEF-taidot DO-taitoihin. Samoin on oletettavaa, että AF- ja BEF-taidot ovat edellytyksenä BET-taidoille. Toisaalta taaksepäin-jonotaidot ovat määräytyneet

* BS-taidot ovat lähinnä kardinaalisisältöön kuuluvia taitoja, joilla on vastaavuus lukujonoyhteydessä; AF- ja BEF-taidot, kun N=1

todennäköisesti vastaavista eteenpäin-jonotaidoista. Informaation käsittelykapasiteetin näkökulmasta UPTO-, DOTO-taidot ovat vaativampia kuin vastaavat TO- ja DO-taidot. UPBY- ja DOBY-taidot vaativat suurempien lukujen "N" tapauksessa (N >3) muistamisstrategioita sekä lukumäärän idean tajuamista. Näistä yksityiskohtaisemmin seuraavissa kappaleissa.

2. Lukujonotaitojen kehittyminen

Fuson jakaa lukujonotaidot viiteen kategoriaan, jotka muodostavat osittain hierarkkisen systeemin (Fuson et al 1982): I ketjutaso (string level), II pitkien toimintojen taso (unbreakable chain level), III puolipitkien toimintojen taso (breakable chain level), IV laskettavien yksiköiden taso (numerable chain level) ja V molempiin suuntiin joustavan etenemisen taso (bidirectional chain level). Seuraavaan kaavioon on poimittu ne asiat, mitä lapsi kullakin tasolla osaa Fusonin tutkimusten perusteella (kaavio V 1).

Jonotaitotasot	Eteenpäin jonotaidot	Taaksepäin jonotaidot	Relationaaliset taidot
I	Ykkösestä alkava UP-taito; sanat mahdollisesti erottamattomia toisistaan		
II	TO-taidot		AF- ja BEF-taidot pitkät toiminnat
III	UP-taidot UPTO-taidot	DO-taidot DOTO-taidot	AF- ja BEF-taidot puolipitkät toiminnat BET-taidot osittain hallussa BET-taidot eteenpäin muodossa BET-taidot taaksepäin muodossa
IV	UPBY-taidot N=2,3 (4) N>4	DOBY-taidot N=2,3 (4) N>4	
V	Osaa laskea ylös- ja alaspäin nopeasti lähdettiinpä mistä luvusta tahansa; osaa vaihtaa suuntia helposti		

Kaavio V 1. Lukujonotaitojen kehitys (versio Fuson et al 1982)

Ketjutasolla lukusanat eivät ole vielä riittävästi erottuneet toisistaan. Toisin sanoen lukusanat eivät vielä ole ajattelun yksittäisiä kohteita, vaan muodostavat toisistaan erottamattoman sanojen "lurituksen". Tämä ilmenee käytännössä siten, että lapsen on kovin vaikea pysähdyttää lukujen luettelua ("laulua") tai objektien laskemista tiettyyn kohtaan. Tällä tasolla ei ole vielä hankittu TO-taitoja. Tämän ohella on ilmeistä, että lukujen luetteluskeema ja laskemisessa tarvittavat havaitsemisskeemat eivät ole vielä pätevästi integroituneet.

Pitkien toimintojen tasolla erilliset lukusanat tulevat ajattelun kohteeksi. Yksilö joutuu tällä tasolla kuitenkin aina aloittamaan alusta (vrt. Galperin 1957, Keranto 1979, 1981). Toisin sanoen tällainen henkilö ei kykene katkaisemaan ketjua sopivasta kohdasta (unbreakable chain level/Fuson). Keskeisin taito, jonka henkilö tällä tasolla saavuttaa, on tiettyyn lukuun "laskemisen"-taito. On huomattavaa ja ilmeistä, että tämän tason lapsi kykenee vastaamaan seuraaviin kysymyksiin: a) Kuinka monta objektia tässä on? b) Kuinka mones objekti tämä on? c) Kuinka monta objektia tässä on yhteensä? d) Kuinka monta objektia jää, jos otan nämä pois? Tällä tasolla saattaa onnistua myös tehtävä e) Kuinka monta objektia on lisättävä (tai vähennettävä) näihin (näistä), jotta saisit niin ja niin monta objektia? Koska on kysymys pitkistä toiminnoista, ei viimeksi mainittu tehtävä ratkenne, jos lukujen erotus on suurempi kuin yksi tai kaksi. Toisaalta aiemmista tutkimuksista on nähtävissä, että AF- ja BEF-taidot liittyvät läheisesti viimeksi mainittuun taitoon. Tämä on yhdenmukaista kaaviosta 4 ilmenevän relaationaalisen kehityksen suhteen (Keranto 1981).

On tärkeää huomata, että pitkien toimintojen tasolla on mahdollisuus löytää suhde laskettavan joukon lukumäärän ja viimeksi mainitun lukusanan välillä. Tämän suhteen löytämistä kutsutaan tässä Gelmanin mukaisesti kardinaaliperiaatteeksi (Gelman & Gallistel 1978). Schaeffer et al ovat käyttäneet samasta asiasta nimitystä kardinaalisääntö (Schaeffer et al 1974). Samoin lapset kykenevät tällä tasolla suorittamaan objektien avulla tyyppiä a±b = ? olevia laskutoimituksia, joista tarkemmin seuraavassa luvussa.

Puolipitkien toimintojen tasolla lapsi osaa jatkaa suoraan annetusta luvusta ylöspäin sekä omaa taidon laskea tietystä luvusta toiseen lukuun (UP- ja UPTO-taidot). UPTO-taidot on luonnollisesti oletettava vaikeammaksi, koska siinä täytyy pitää mielessä mihin lukuun pitää laskea. Tässä työssä tutkitaan yhtenä yksityiskohtana mikä on informaation käsittelykapasiteetin osuus esimerkiksi tämän UPTO-taidon osalta. Tällä tasolla ilmenevät myös taaksepäin jonotaidot DO ja DOTO, jotka vaativat lapselta kykyä muistaa useita sanoja ja tuottaa ne käänteisessä järjestyksessä. On ilmeistä, että lapset käyttävät eteenpäin jonotaitojaan luodakseen taaksepäin jonotaidot. Itse asiassa on vihjeitä siitä, että tietyssä kehitysvaiheessa tuotetaan tiettyä lukua edeltävä osajono ja käännetään tämä lyhytaikaisessa muistissa. On ilmeistä, että tämä vaatii tietyn kokoista informaation käsittelykapasiteettia. Tätä ei ole kuitenkaan yksityiskohtaisemmin tutkittu. On ymmärrettävää, että DOTO-taidot ovat vaativampia kuin DO-taidot. Onhan ensiksimainitussa tapauksessa muistettava luku, mihin pitää lopettaa. Tämä vaatii luonnollisesti yhden lisäpaikan lyhytaikaisesta muistista. Ei ole kuitenkaan selvää näyttöä informaation kapasiteetin ja tämän taidon välisestä suhteesta.

Mitä tulee AF- ja BEF-taitoihin tällä tasolla, niin on ilmeistä, että BEF-taidot ovat hivenen vaikeampia kuin AF-taidot. Onhan henkilön itse asiassa ajateltava taaksepäin lukujonossa yhden askeleen verran, mikäli aikoo selvitä BEF-tehtävästä. BEF-tehtävää voitaneenkin pitää erikoistapauksena taaksepäinluettelutaidoista. On huomattavaa, että AF- ja BEF-taidoilla on vastineensa lukumäärien määrityksen yhteydessä: yhtä suurempi tai yhtä pienempi (BS-taidot/yksinkertaisin tapaus). Ei ole varmoja todisteita siitä, kehittyvätkö nämä lukujono- ja vastaavat kardinaalitaidot riippumatta toisistaan, vai käytetäänkö toista relaatiota toisen löytämisessä. Ei ole myöskään tietoa siitä, mikä on Piaget-kykyjen merkitys kolmannen tason taitojen saavuttamisessa. Ei myöskään tiedetä, miten BET-taidot tosiasiassa rakentuvat. Loogisesta näkökulmasta BET-taidot riippuvat kyvystä yhdistää AF- ja BEF-taidot, kun annettujen lukujen väliin mahtuu yksi tai kaksi lukua. BET-taidot ovat myös relaatiossa kolmannen tason UPTO- ja/tai DOTO-taitoihin, jos asiaa tarkastellaan

loogisesta näkökulmasta. Se miten tämä asia käytännössä on, vaatii siis tutkimusta. BET-taidoilla on vastineensa kardinaalisisällössä ("mitkä luvut ovat suurempia kuin x ja pienempiä kuin y"), mutta näitä taitoja ja niiden yhteyksiä vastaaviin lukujonotaitoihin ei tässä työssä käsitellä tämän enempää.

Tarkasteltavan lukujonotason taitoja on periaatteessa mahdollisuus soveltaa tyyppiä a $\pm$? = b olevien yhteen- ja vähennyslaskutehtävien ratkaisuun. Tämä vaatii kuitenkin UPTO- ja DOTO-taitojen lisäksi ymmärryksen siitä, että lukujonon sanoja voidaan pitää yksikköinä, joiden joukko esittää puuttuvaa yhteenlasket-tavaa tai vähentäjää. Tämän ohella tarvitaan jokin strategia pitää mielessä näiden lukusanayksikköjen lukumäärä. Fusonin mukaan tämä saavutetaan seuraavalla asteella (Fuson et al 1982).

Laskettavien yksiköiden tasolla lapsi ymmärtää tarkastella lukusanoja yksikköinä ja pystyy määrittämään näiden yksiköiden muodostamien segmenttien lukumäärät. Tällä tasolla saavutetaan siis kaksi tärkeää lisätaitoa: a) osaa laskea spesifin luvun N ilmoittaman määrän lukusanoja eteen- ja taaksepäin (UPBY- ja DOBY-taidot), b) osaa laskea luvusta x lukuun y käytettyjen lukusanojen lukumäärän. On selviä viitteitä siitä, että on olemassa merkittävä viive laskea ylös- tai alaspäin pienillä ($N \leq 3$) ja suuremmilla ($N \geq 5$) luvuilla: Fuson raportoi, että tutkituista 32 kuusivuotiaasta lapsesta osasi 79 %, 45 % ja 30 % UPBY-tehtävät, kun N oli vastaavasti 2, 3 ja 8. Vastaavat taaksepäin-taitoprosentit olivat 68 %, 18 % ja 13 % (Fuson et al 1982).

On jonkin verran tietoa siitä, millaisia strategioita lapset käyttävät laskettujen lukusanojen lukumäärän määrittämisessä UPBY- ja DOBY-tehtävissä. Informaation käsittelykapasiteetin näkökulmasta vähiten paineita aiheuttava menetelmä on ulkoisten objektien manipulointi kyseisissä ongelmissa. Tässä ulkoisten objektien käytön strategiassa on mahdollisuus ainakin kahdentyyppiseen suoritukseen. Objekteja (esimerkiksi sormet) otetaan sitä mukaa, kun sanotaan uusia lukusanoja. Toinen mahdollisuus on, että otetaan valmiiksi laskettavan lukumäärän ilmoittama objektijoukko.

Toinen pääluokka muistamisstrategioissa on mielessäpitostrategiat. Periaatteessa nämä ovat analogisia ulkoisten objektien käytön strategioiden kanssa. Erona on vain se, että nyt ajattelu kyetään kohdistamaan suoraan käytettyjen ja käyttämättömien lukusanojen lukumääriin. Ordinaalisessa strategiassa lasketaan kuinka mones kukin käytetty lukusana on. On ymmärrettävää, että tämä strategia vaatii lukukäsitteen ordinaalisten ja kardinaalisten ominaisuuksien synteesiä. Tämän ohella tämä strategia on ilmeisen vaativa informaation käsittelykapasiteetin näkökulmasta. Miten tämän strategian käyttö liittyy mainittujen kognitiivisten kykyjen omaksumiseen on tutkimatta. Toinen käytetty strategia on laskea etukäteen luku johon pitää luetella! Tällä tavoin tilanne palautuu UPTO- tai DOTO-taitojen käyttöön.

On huomattavaa, että mainittuja mielessäpitostrategioita tarvitaan ilmeisesti lähinnä suurempien lukujen N (N > 3 tai 4) tapauksessa. Mikäli N on pienempi kuin 3, kykenevät lapset todennäköisesti hahmottamaan suoraan kuinka monta lukusanaa on käytetty. Tällaista strategiaa kutsutaan tässä korvaamis- eli substituutiostrategiaksi (vrt. Match Count to Auditory pattern strategy/Fuson et al 1982).

Kuvattuja UPBY- ja DOBY-taitoja voidaan käyttää hyväksi perustavissa yhteen- ja vähennyslaskutyypeissä. Esimerkiksi tehtävä a + b = ? voidaan tällä tasolla ratkaista "laskemalla" luvusta a eteenpäin luvun b ilmoittaman lukumäärän lukusanoja (a+1,...,c), jolloin lukusana c ilmoittaa tuloksen. Vastaavasti voidaan ratkaista tehtävä a + ? = c, etenemällä lukujonossa lukusanaan b asti ja pitämällä samalla mielessä kuinka monta lukusanaa tuli käytettyä. Siitä, miten Piaget-kyvyt ja informaation kapasiteetti säätelevät kyseisten taitojen kehitystä, on kovin vähän tietoa. Tähän palataan seuraavassa luvussa.

Siitä, miten kehittyneemmät SABY-lukujonotaidot liittyvät edellä oleviin laskutoimituksiin ja jonotaitoihin, ei ole selvyyttä. Loogisesta ja informaation prosessoinnin ekonomian periaatteen näkökulmasta on luultavaa, että tietystä luvusta yksitellen eteneminen kehittyy vähin erin tietyin suuremmin välein etenemiseksi. Onko tällaista välivaihetta olemassa ennen tietotasoa? Tästäkään ei ole olemassa pätevää tietoa. Toisaalta on loogisesti

ajateltuna ymmärrettävää, että kerto- ja jakotaitojen omaksumisessa SABY-taidoilla on merkitystä. Onhan kertolaskuoperaatio tiukasti sidottu saman luvun kertautuviin yhteenlaskuihin. Tämä tulee olemaan tämän työn jatkotutkimuskohde.

Molempiin suuntiin joustavan etenemisen tasolla on eteen- ja taaksepäin "laskemistoiminnot" koordinoitu siinä mielessä, että lapsi tietää niiden johtavan samaan tulokseen käänteisissä laskutoimituksissa. Tällä tasolla on myös kaksi muuta ominaisuutta, joiden mukaan kyseinen taso on ehkä erotettavissa muista tasoista: eteen- ja taaksepäin taidot ovat vahvasti automatisoituneet eikä kumpikaan dominoi toista; toiseksi tämän tason lapsella on kyky nopeasti ja joustavasti vaihtaa suuntia. Tällä hetkellä on kovin vähän tietoa neljännen ja viidennen tason kehitys- ja riippuvuussuhteista. Fusonin mukaan viidennen tason toiminnot saattavat kehittyä toisistaan riippumatta tai viidennen tason toiminnot ilmenevät neljännen tason toimintojen jälkeen (Fuson et al 1982).

V B LUKUJONOTAITOJEN KOKEELLINEN NÄKÖKULMA

Tämän luvun kokeellisen osan pääongelmat esitetään seuraavasti:

A. Missä määrin tutkittavat spesifit lukujonotaidot hierarkisoituvat?

B. Mitkä ovat spesifien lukujonotaitojen keskinäiset riippuvuussuhteet?

C. Missä määrin kognitiiviset kyvyt (IPC ja PIAGET) säätelevät ja selittävät lukujonotaitoja?

D. Missä määrin lukujonotaidot ja kognitiiviset kyvyt selittävät UPBY- ja DOBY-osioissa käytettäviä muistamisstrategioita?

Ensimmäiseen kysymykseen haetaan vastausta Guttmanin skaalan avulla (Guttman 1944, White & Saltz 1957). Muihin kysymyksiin pyritään vastaamaan suoritettujen t-testien ja regressioanalyysien avulla. Ennen kuin siirrytään tilastollisiin analyyseihin tarkastellaan lyhyesti käytettyä mittaria ja sen pisteytystä.

1. Lukujonotaitojen mittari sekä pisteytykset

Tutkittavat spesifit lukujonotaidot ovat ENUM, UP, AF, BEF, TO, DO, UPTO, DOTO, BET, UPBY, DOBY, SABY sekä lähemmin laskemiseen liittyvä BS. Kun tässä työssä puhutaan lukujonotaidoista, viittaa se tilastollisen analyysin yhteydessä suoritusten oikeellisuuteen. Strategioista puhuminen tässä yhteydessä viittaa UPBY- ja DOBY-osioiden muistamisstrategioihin. Suoritusten oikeellisuuteen perustuva pisteytys on seuraava: jokaisesta täysin virheettömästä suorituksesta saa koehenkilö 1 pisteen, muuten 0 pistettä. Muodostetut summamuuttujat ovat seuraavat:

$$UP=\sum_{i=1}^{5} UP_i,\quad AF=\sum_{i=1}^{3} AF_i,\quad BEF=\sum_{i=1}^{3} BEF_i,\quad TO=\sum_{i=1}^{2} TO_i,\quad DO=\sum_{i=1}^{2} DO_i,$$

$$UPTO=\sum_{i=1}^{3} UPTO_i,\quad DOTO=\sum_{i=1}^{3} DOTO_i,\quad BET=\sum_{i=1}^{3} BET_i,\quad UPBY=\sum_{i=1}^{6} UPBY_i,$$

$$DOBY=\sum_{i=1}^{6} DOBY_i,\quad SABY=\sum_{i=1}^{5} SABY_i \text{ sekä } BS=\sum_{i=1}^{8} BS_i.$$

Kuhunkin summamuuttujaan liittyvät yksittäiset osiot on nähtävissä liitteestä V 1. Yleisperiaatteena on, että kunkin muuttujan ensimmäinen osio on valittu lukualueelta 1 - 10. Toisaalta jokaisessa tyypissä on myös lukualueen 10 - 20 tehtävä (ks. tarkemmin liite V 1.).

Muuttujan ENUM pisteytys on seuraava: 0 pistettä, kun luettelu jää välille]15,20[; 1 piste, kun luettelu jää välille]20,30[; 2 pistettä, kun luettelussa vaikeuksia siirryttäessä 30- ja 40-lukualueille; 3 pistettä, kun sujuva ja täysin virheetön suoritus lukuun 42 asti. UPBY- ja DOBY-muuttujiin liittyvien strategioiden pisteytys on seuraava: 0 pistettä, kun ei pätevää strategiaa; 1 piste, kun sormien käyttöön perustuva strategia; 2 pistettä, kun kykenee suoraan korvaamaan lasketun lukumäärän; 3 pistettä, kun etukäteen laskee päässään "mihin lukuun pitäisi luetella", 4 pistettä, kun päässään laskee "kuinka mones kukin käytetty lukusana on".

2. Lukujonotaitojen suoritusprosentit ja luotettavuus

Alla olevassa taulukossa on esitetty kunkin spesifin lukujonotaidon osioiden suoritusprosentit (taulukko V 1).

Taulukko V 1. Spesifien lukujonotaitojen suoritusprosentit (N=35)

UP1	UP2	UP3	UP4	UP5	AF1	AF2	AF3	BEF1	BEF2	BEF3	TO1	TO2	DO1	DO2
97	97	94	91	74	94	94	71	80	80	74	94	86	69	63

UPTO1	UPTO2	UPTO3	DOTO1	DOTO2	DOTO3	BET1	BET2	BET3
86	57	29	46	31	31	71	49	49

UPBY1	UPBY2	UPBY3	UPBY4	UPBY5	UPBY6	DOBY1	DOBY2	DOBY3	DOBY4	DOBY5	DOBY6
77	49	31	77	46	26	69	49	31	69	46	26

SABY1	SABY2	SABY3	SABY4	SABY5	BS1	BS2	BS3	BS4	BS5	BS6	BS7	BS8
77	51	32	24	47	60	63	51	40	40	29	37	29

Yllä olevasta taulukosta tehdään eräitä kiinnostavia huomioita. Ensinnäkin lukualueen 20 - 30 tehtävät UP5, AF3, BEF3 ja BET3 ovat vaikeampia kuin vastaavat lukualueen 1 - 10 (UP1-2, AF1, BEF1 ja BET1) sekä lukualueen 10 - 20 (UP3-4, AF2, BEF2 ja BET2) tehtävät. Lukualueen "yleistettävyyden periaate" toimi AF, BEF ja UP-taidoissa täydellisesti. Toisin sanoen kaikki lapset osasivat alemman lukualueen tehtävät mikäli ylemmän lukualueen tehtävät tai tehtävä oli oikein. BET-osiossa tätä periaatetta"rikottiin" kahdessa tapauksessa, nämäkin lukualueiden lo - 20 ja 20 - 30 välillä.

Toiseksi tietyn lukualueen eteenpäin -jonotaidot ovat jonkin verran helpompia kuin vastaavat taaksepäin -jonotaidot, kun tarkastellaan TO, DO, UPTO ja DOTO-muuttujia. Poikkeuksen muodostaa UPTO3 ja DOTO3 osiot. DO ja TO muuttujien osalta "yleistettävyys" on täydellinen. Periaatetta rikotaan kolmessa tapauksessa UPTO ja DOTO muuttujien osalta, nämäkin lukualueiden 10 - 20 ja 20 - 30 välillä.

Kolmannen mielenkiintoisen ryhmän muodostaa UPBY- ja DOBY-taidot. Näissä tehtävissä on lähinnä oleellista se, kuinka monta lukusanaa on jatkettava tietystä luvusta eteenpäin. Itse asiassa UPBY1, UPBY4, DOBY1 ja DOBY4 tehtävissä oli lueteltava kaksi lukua eteenpäin tai taaksepäin. Sillä lähtikö luettelu lukualueelta 1 - 10 tai 1o - 20 ei ole merkitystä. Kummassakin tapauksessa on vain yksi rikkomus yleistettävyyttä vastaan. Tehtävissä UPBY2, UPBY5, DOBY2 ja DOBY5 oli lueteltava viisi lukua eteen- tai taaksepäin. Rikkomuksia tapahtui kummassakin tyypissä kaksi kertaa. Tehtävissä UPBY3 ja 6 sekä DOBY3 ja 6 oli lueteltava kahdeksan lukua eteen- tai taaksepäin. Näissä tehtävissä havaittiin poikkeamia tarkasteltavasta periaatteesta seuraavasti: UPBY tehtävissä kaksi kertaa ja ei kertaakaan DOBY tehtävissä. "Yleistettävyyden" näkökulmasta voitaneen kaikkia tarkasteltuja muuttujia UP-DOBY pitää varsin luotettavina. On myös kiintoisaa havaita, että UPBY tehtävien suoritusprosentit vastaavat Fusonin tuloksia. DOBY tehtävien suoritusprosentit ovat hivenen korkeampia kuin Fusonin mittaustulokset (Fuson et al 1982).

Neljännen kiintoisan tarkastelukohteen muodostavat SABY-taidot. Kaikkein kehittynein näistä taidoista oli 10-lukujen luettelu. SABY-taidot muodostavat itse asiassa täydellisen hierarkian, joka esitetään seuraavassa jonomuodossa: SABY1 (10-lukujen luettelu) -→ SABY2 (parillisten lukujen luettelu) -→ SABY5 (viisilukujen luettelu) -→ SABY3 (kolme-lukujen luettelu) -→ SABY4 (neljä-lukujen luettelu). Viidennen ja ehkä ongelmallisimman tarkastelukohteen muodostavat BS-taidot. Näissä tehtävissä lapsilla oli aluksi ymmärtämisvaikeuksia: heidän oli vaikea päätellä mihin käytetty kysymystyyppi viittaa. Neljä lasta kysyi eksplisiittisesti, mitä kysymys tarkoittaa. Tehtävät BS1-6 olivat lukualueen 1 - 10 tehtäviä siten, että tehtävissä BS1-2 oli

tarkasteltavien lukujen erotus 1, tehtävissä BS3-4 erotus 2 ja lopuissa 3. Myös tehtävissä BS7 ja 8 oli vertailtavien lukujen erotus 3. Tämän ohella nämä tehtävät vaativat kymmenenylitystä. Edellä mainitut vaikeudet näkyvät lähinnä tehtävien BS1 ja BS2 välisessä suhteessa. Itse asiassa oli kolme lasta, jotka osasivat BS2 tehtävän, mutta eivät tehtävää BS1. Käänteisessä suunnassa oli yksi tapaus. Toisaalta tehtäväparien BS3-4, BS5-6 ja BS7-8 vastaavat sisäiset suhteet ovat lähes täydelliset; vain kaksi rikkomusta kaikkiaan. Tämän ohella on vain kolme tapausta, jossa jonoa BS1 -> BS3 -> BS5 -> BS7 "rikotaan". Vastaava tilanne on jonon BS2 -> BS4 -> BS6 -> BS8 osalta. Jos tarkastellaan yhteissuorituksia, niin saadaan seuraava vaikeusjono BS1&2 $\xrightarrow{4}$ BS3&4 $\xrightarrow{4}$ BS5&6 $\xrightarrow{3}$ BS7&8. Tässä luvut katkoviivojen yläpuolella ilmoittavat tapaukset, joissa toinen alemman tason tehtävistä on epäonnistunut ja samalla molemmat ylemmän tason tehtävistä onnistuneet. Yhtään sellaista tapausta ei ollut, jossa molemmat alemman tason tehtävistä olisivat epäonnistuneet ja ylemman tason tehtävät onnistuneet. Edellä olevan perusteella BS-taitojakin voitaneen pitää suhteellisen luotettavina.

3. Missä määrin spesifit lukujonotaidot hierarkisoituvat?

Lukualueen vaikutuksen vakioimiseksi tarkastelut tullaan suorittamaan erikseen lukualueiden 1 - 10 ja 10 - 20 lukujonotaidoille. Tämän ohella tutkitaan aluksi eteenpäin-, taaksepäin- ja relaationaalisia lukujonotaitoja erillään toisistaan. Tarkasteltavat eteenpäinjonotaidot ovat UP, TO, UPTO ja UPBY-taidot. Taaksepäinjonotaidot ovat DO, DOTO ja DOBY. Relaationaaliset lukujonotaidot ovat AF, BEF ja BET.

Hierarkisoitumisen tutkimiseksi muodostettiin matriisit (3/lukualue), joissa osiot on asetettu vaikeusjärjestykseen ja koehenkilöt menestymisjärjestykseen. Tällöin muodostuu Guttmanin skaalat, joissa diagonaalimurtoviiva erottelee (vasemmalta ylhäältä oikealle alas) niiden osioiden alueen, jossa on onnistuttu (1-alue), niiden osioiden alueesta, jossa on epäonnistuttu (0-alue) (Guttman 1944).

Kunkin skaalan hierarkkinen luonne voidaan analysoida seuraavasti. Olkoon N koehenkilöiden lukumäärä ja K osioiden lukumäärä. Olkoon lisäksi E virheellisten suoritusten lukumäärä (0 pisteet) oikeiden suoritusten kentässä (1 pisteet) plus oikeiden suoritusten lukumäärä virheellisten suoritusten kentässä. Tällöin Guttmanin ehdottama skaalan hierarkkisuutta mittaava vakio on CR = 1 - E:KN (coefficient of reproductibility). Toinen tarkoitusta varten kehitetty kerroin on PPR = (CR - MMR):(1-MMR), missä MMR = $[\sum_{i=1}^{K} \max_i(n(\text{oikeat suoritukset}), n(\text{väärät suoritukset}))]$: KN (Jackson's plus percentage ratio, White & Saltz 1957). Niin kutsutulle "täydelliselle" hierarkialle on suositeltu seuraavia arvoja: CR $\geq$ 0.90, kun MMR $\leq$ 0.80; PPR $\geq$ 0.70. Tarkastellaan nyt esitetyn valossa lukujonotaitojen hierarkisoitumista. Lukualueen 1 - 10 tutkittavat skaalat ja kriittiset arvot ovat seuraavat:

A. Eteenpäintaidot UP1, UP2-→TO1-→UPTO1-→UPBY1-→UPBY2-→UPBY3
   CR=0.96, MMR=0.82 ja PPR=0.78
B. Taaksepäintaidot DO1-→DOBY1-→DOBY2-→DOTO1-→DOBY3
   CR=0.85, MMR=0.62 ja PPR=0.61
C. Relaationaaliset taidot AF1-→BEF1-→BET1
   CR=0.94, MMR=0.81 ja PPR=0.68

Lukualueen 10 - 20 tutkittavat skaalat ja kriittiset arvot ovat seuraavat:

A. Eteenpäintaidot UP3-→UP4-→TO2-→UPBY4-→UPTO2-→UPBY5-→UPBY6
   CR=0.89, MMR=0.72 ja PPR=0.61
B. Taaksepäintaidot DOBY4-→DO2-→DOBY5-→DOTO2-→DOBY6
   CR=0.92, MMR=0.66 ja PPR=0.76
C. Relaationaaliset taidot AF2-→BEF2-→BET2
   CR=1.00, MMR=0.76 ja PPR=1.00

Guttmanin kriteeristön mukaan voidaan kaikkia muita paitsi lukualueen 1 - 10 taaksepäintaitoja pitää "täydellisenä" hierarkiana. Jacksonin kriteerin (PPR = 0.70) mukaan lukualueen 1 - 10 eteenpäintaidot sekä lukualueen 10 - 20 taaksepäin ja relaationaaliset taidot muodostavat "täydellisen" hierarkian. Myös lukualueen 1 - 10 relaationaalisten taitojen PPR vakio on kovin lähellä kriittistä arvoa 0.70.

Teoreettisessa osassa esitetty kaavio V 1 saa osin kokeellista tukea. On nimittäin havaittavissa seuraavat täydelliset osahierarkiat, jotka loogisen etukäteisanalyysin perusteella oli ennakoitavissa: UP -- UPTO sekä TO -- UPTO. Informaation prosessoinnin näkökulmasta oli ennakoitavissa seuraava täydelliseksi todettu osahierarkia: UPBY"2" -→ UPBY"5" -→ UPBY"8", missä "n" viittaa lueteltavien lukusanojen lukumäärään. Ongelmallisia kohtia ovat UPTO ja UPBY-taitojen kehitykselliset suhteet. Tämä tulee erityisesti näkyviin lukualueen 10 - 20 skaalasta. Tässähän UPTO2 on UPBY4 sekä UPBY5 ja 6 suoritusten välillä aiheuttaen itse asiassa suurimman yksittäisen poikkeaman kyseisessä skaalassa (4 poikkeamaa). Tämä taas aiheutti, että kyseisen skaalan kriittiset arvot jäävät hiukan alle sovittujen rajojen. Mitä tulee UP ja TO taitojen keskinäiseen kehityssuhteeseen, niin ovat ne kovin samantasoisia koulutulokkaiden iässä. Täten tarvitaan jatkotutkimus nuoremmilla lapsilla, jotta nähdään onko yleensäkään hierarkista kehitystä näiden taitojen välillä.

Taaksepäintaitojen osalta voidaan todeta seuraavat loogis-teoreettisesta näkökulmasta ennakoidut osahierarkiat: DO -→ DOTO sekä DOBY"2" -→ DOBY"5" -→ DOBY"8". Ongelmallinen kohta on DO ja DOTO-taitojen kehityssuhde DOBY-taitoihin. Tilanne on analoginen eteenpäintaitojen kanssa. Suurimmat poikkeamat skaaloissa tapahtuivat juuri näiden DO ja DOTO muuttujien kohdalla. Erityisesti tämä koskee lukualueen 1 - 10 taitoja (DOBY1 $\overset{4}{--}$ DOTO1 ja DO1 $\overset{4}{--}$ DOBY1). Tämä aiheutti lukualueen 1 - 10 skaalan B arvojen jäämisen kriittisten arvojen alapuolelle.

Relaationaalisten taitojen osalta kaavion V 1 hierarkia saa kokeellista tukea. Itse asiassa voitiin todeta jopa tarkempi hierarkia AF -- BEF -- BET. Kiinnostuksen vuoksi määrättiin myös kaikkia lukujonotaitoja koskevat skaalat lukualueilla 1 - 10 ja 10 - 20. Lukualueen 1 - 10 skaala on seuraava: UP1-→UP2-→AF1-→ TO1-→ UPTO1-→BEF1-→UPBY1-→BET1-→DO1-→DOBY1-→UPBY2-→DOBY2-→DOTO1 -→UPBY3--DOBY3
CR=0.89, MMR=0.75 ja PPR=0.56
Lukualueen 10 - 20 skaala on seuraava: UP3-→AF2-→UP4-→TO2-→ BEF2-→UPBY4-→DOBY4-→DO2-→UPTO2-→BET2-→UPBY5-→DOBY5-→DOTO2-→ UPBY6-→DOBY6
CR=0.87, MMR=0.73 ja PPR=0.52

Vakioiden arvot eivät yllä "täydellisen" skaalan tasolle kuten edellä olevista tarkasteluista oli jo nähtävissä. Erityisesti PPR arvot ovat alhaisempia kuin aiemmissa skaaloissa havaitut arvot. Näihin laajempiin skaaloihin sisältyy eräitä mielenkiintoisia täydellisiksi todettuja osahierarkioita: UP-→DO, BEF-→LO sekä AF-→UPTO. Toisaalta jono UPTO--DOTO ei täytä täydellisen skaalan vaatimuksia.

Yhteenvetona voidaan todeta, että lukualueiden 1 - 10 ja 10 - 20 eteen-, taakse- ja relaationaaliset taidot muodostavat hierarkisia skaaloja, jotka ovat yleisesti ottaen "täydellisiä". Havaittiin myös näiden skaalojen osahierarkioita, jotka tukevat loogisteoreettista analyysiä. Toisaalta löytyi ongelmallisia kehityksellisiä suhteita erityisesti UPTO ja UPBY-taitojen välillä sekä DOTO ja DOBY-taitojen välillä. UP ja TO-taitojen kehityksellisen suhteen selvittämiseen vaaditaan jatkotutkimuksia nuoremmilla lapsilla.

4. Mitkä ovat spesifien lukujonotaitojen keskinäiset riippuvuussuhteet?

Esitettyyn kysymykseen etsitään vastausta korrelaatioiden sekä suoritettujen regressioanalyysien (stepwise method) avulla. Alla olevassa taulukossa on esitetty summamuuttujien korrelaatiot.

Taulukko V 2. Lukujonotaitojen korrelaatiomatriisi (N=35)

	TO	UPTO	UPBY	DO	DOTO	DOBY	AF	BEF	BET	SABY	BS	ENUM
UP	13	71***	57***	68***	37*	59***	83***	88***	46**	47**	46**	59***
TO		33*	30	23	24	30	02	18	40*	41*	25	16
UPTO			51**	71***	54***	60***	65***	68***	46**	56***	50**	60***
UPBY				43**	29	80***	58***	67***	59***	62***	56***	43**
DO					56***	61***	61***	62***	48**	64***	46**	74***
DOTO						57***	25	35*	30	38*	39*	53***
DOBY							62***	67***	68***	74***	59***	58***
AF								80***	58***	53***	50**	50**
BEF									54***	55***	52**	62***
BET										54***	57***	60***
SABY											61***	60***
BS												46**

*** p< .001 ** p< .01 * p< .05

Kuten yllä olevasta taulukosta ilmenee lukujonotaidot ovat korkeasti korreloituneita. Poikkeuksen muodostaa lähinnä TO-taidot, joilla on yhteys lähinnä BET ja SABY-taitoihin. Korkeimmat korrelaatiot havaitaan AF, BEF ja UP-taitojen välillä. Myös UPBY- ja DOBY-taitojen korrelaatio on 0.80 tasoa. Lukujen sujuva luettelu on tilastollisesti vähintäinkin merkitsevässä korrelaatiossa kaikkiin muihin paitsi TO-taitoon. Sama tilanne on BS-taitojen osalta. Seuraavassa taulukossa on kiteytetty se missä määrin tiettyjä lukujonotaitoja kyetään selittämään muilla lukujonotaidoilla.

Taulukko V 3. Lukujonotaitojen regressiomalli (N=35)

Selitettävä	Selittäjät; {lukujonotaidot} - {selitettävä}	R^2(%)
ENUM	= 0.59 DO + 0.31 BET	62
BS	= 0.42 SABY + 0.33 BET	45
BET	= 0.50 DOBY + 0.31 ENUM	52
SABY	= 0.55 DOBY + 0.30 DO	60
DOBY	= 0.45 UPBY + 0.30 DOTO + 0.24 SABY+ 0.19 BET	83
UPBY	= 0.94 DOBY - 0.25 DOTO	67
DOTO	= 0.77 DOBY - 0.49 UPBY + 0.32 UPTO	48
UPTO	= 0.43 UP + 0.41 DO	60

($p < .05$)

Kaikkein parhaimmaksi selittäjäksi ja selitettäväksikin osoittautuu DOBY-taidot. Käytetyillä kriteereillä heikoimmaksi selitettäväksi osoittautuu BS-taidot ja DOTO-taidot. Muiden vaativimpien taitojen selitysosuudet nousevat 50 % tason yläpuolelle, DOBY-taitojen osalta jopa 83 % tasolle.

5. <u>Missä määrin kognitiiviset kyvyt säätelevät lukujonotaitoja?</u>

Ensin tarkastellaan missä määrin kognitiivisten kykyjen puute vaikuttaa lukujonotaitoihin. Piaget-kykyjen edustajina ovat TEJEC- ja TLC-muuttujat sekä IPC-kykyjen edustajina ESP(O)-, ESP(S)-, CSP- ja MEASP-muuttujat. Kognitiivisia kykyjä merkitään lyhyesti (CA).

Taulukko V 4. Ryhmien CA=0 ja CA > 0 suorituserot lukujonotaitojen suhteen. Taulukkoon on merkitty vain ne keskiarvot joissa vähintäin 5 % tilastolliset erot (N=35)

	UP	TO	UPTO	UPBY	DO	DOTO	DOBY	AF	BEF	BET	SABY	BS	ENUM
TEJEC=0 (7)				0.71			1.00		1.57	0.71		1.29	
				**			*		*	*		*	
TEJEC 0(28)				3.64			3.36		2.54	1.89		4.04	
TLC =0(12)	4.00			1.67	0.83	0.5	0.5	2.17	1.50	0.67	0.83	1.17	
	**			***	*	*	***	**	***	***	**	***	
TLC >0(23)	4.83			4.04	1.57	1.3	4.13	2.83	2.78	2.17	2.30	4.50	
ESP(0)=0(9)				1.56			1.56			0.44		1.67	1.44
				*			*			***		*	**
ESP(0)>0(26)				3.58			3.35			2.08		4.12	2.50
ESP(S)=0(7)			1.00	1.57			1.00	2.14	1.29	0.71		1.43	1.43
			*	*			*	*	**	*		*	*
ESP(S)>0(28)			1.96	3.43			3.36	2.71	2.61	1.89		4.00	2.43
CSP =0(14)	ei erottele; t-arvot < 1.00												
CSP >0(21)													
MEASP=0(8)	ei erottele; t-arvot < 2.00												
MEASP>0(27)													

***p < .001 **p < .01 *p < .05

Tuloksista havaitaan selvä trendi. Mitä vaikeammista lukujonotaidoista on kysymys sitä paremmin ryhmät CA=0 ja CA > 0 eroavat toisistaan. Toisaalta CSP- ja MEASP-ryhmät eivät eroa tilastollisesti minkään lukujonotaidon suhteen. Tämä vahvistaa ajatusta IPC-kykyjen spesifistä luonteesta. Erottelevathan ESP(0) ja ESP(S) kehittyneempien lukujonotaitojen osalta, kuten pitäisi loogisesti ajatellen ollakin.

Toiseksi tarkastellaan miten omien kognitiivisten prosessien tiedostaminen on yhteydessä lukujonotaitoihin. Tiedostamiskykyjen edustajina ovat TTR, TSUBS, TIN, TNC ja TEJEC muuttujat.

Taulukko V 5. Kognitiivisen suoritusprosessin tiedostamisen tason yhteys lukujonotaitoihin (N=35)

	UP	TO	UPTO	UPBY	DO	DOTO	DOBY	AF	BEF	BET	SABY	BS	ENUM
TTR < 7(16)					0.94					0.94			1.81
TTR > 6(19)					1.63					2.26**			2.58*
TSUBS < 7(13)	4.08		1.23	2.08	0.69		1.31	2.23	1.77	0.62	0.92	1.85	1.54
TSUBS > 6(22)	4.82**		2.09*	3.64*	1.68***		3.82**	2.82*	2.68*	2.27***	2.32**	4.46*	2.64**
TIN < 5(8)				1.34			1.23					1.25	
TIN > 4(27)				3.56**			3.41*					4.15*	
TNC < 3(15)	4.20			1.27			1.40	2.20	1.67	1.07	1.00	1.73	
TNC > 2(20)	4.80*			4.40***			4.00**	2.90**	2.85**	2.10*	2.40**	4.60**	
TEJEC < 7(21)				2.43			2.24			1.19	1.29	2.38	
TEJEC > 6(14)				4.00*			3.86*			2.36*	2.57**	5.14**	

***p < .001 ** p < .01 *p < .05

Osoittautuu, että Piaget'n tyyppisten tehtävien suoritusprosessin tiedostamistasolla on merkitystä lukujonotaitotehtävien suoritukselle. Mitä korkeammista lukujonotaidoista on kysymys sitä merkittävimmiksi erot muodostuvat "tiedostajien" ja "ei-tiedostajien" välillä. Tämä tukee siis osittain Piaget'n ajatusta ja kriteerejä operationaalisen tason merkityksestä matemaattis-loogisille kyvyille, joihin myös lukujonotaidot katsotaan kuuluviksi.

6. Missä määrin IPC-kyvyt selittävät lukujonotaitoja ja kääntäen?

Regressioanalyysiin liittyen esitetään lukujonotaitojen ja IPC-kykyjen korrelaatiomatriisi.

Taulukko V 6. Lukujonotaitojen ja IPC-kykyjen väliset korrelaatiot (N=35)

	UP	TO	UPTO	UPBY	DO	DOTO	DOBY	AF	BEF	BET	SABY	BS	ENUM
ESP	30	20	48**	39*	31	46**	54***	35*	40*	54***	44**	61**	52**
ESP(O)	13	31	18	39*	17	31	33*	16	25	47**	23	40*	43**
ESP_m(O)	31	-06	22	34*	38*	36*	29	24	43**	25	11	35*	37*
ESP(S)	37*	18	56***	34*	35*	48**	48**	38*	45**	48**	35*	62***	51**
ESP_m(S)	27	14	53***	26	36*	48**	42*	24	34*	43**	34*	52**	54***
CSP	24	15	-01	13	-18	-09	16	14	-06	09	17	-00	07
CSP_m	-01	28	14	32	10	-01	24	14	18	35*	44**	31	27
MEASP	-02	-18	02	24	-06	-05	22	11	13	31	28	33*	22
$MEASP_m$	10	00	21	27	11	18	20	22	16	17	21	32	09

*** p < .001 ** p < .01 *p < .05

Korrelaatiomatriisista on nähtävissä sama trendi kuin t-testeissä. Lukujonotaitoihin liittyvät IPC-kyvyt korreloivat lukujonotaitoihin ja sitä voimakkaammin mitä korkeammasta lukujonotaidosta on kysymys. CSP ja MEASP-kyvyillä on kovin heikkoja yhteyksiä lukujonotaitoihin. Tämä tulee luonnollisesti heijastumaan seuraavaksi tarkasteltaviin regressiomalleihin.

Taulukko V 7. Lukujonotaitojen regressiomalli (N=35). Selittäjinä IPC-kyvyt

Selitettävä		Selittäjät; IPC-kyvyt	R^2 (%)
UP	=	0.47 ESP(S) - 0.36 CSP	26
TO	=	ei merkitseviä selittäjiä	-
UPTO	=	0.56 ESP(S)	31
UPBY	=	0.39 ESP	15
DO	=	0.38 ESP_m(O)	14
DOTO	=	0.48 ESP_m(S)	23
DOBY	=	0.54 ESP	29
AF	=	0.38 ESP(S)	15
BEF	=	0.45 ESP(S)	20
BET	=	0.54 ESP	29
BS	=	0.61 ESP(S) - 0.34 CSP + 0.31 MEASP	48
ENUM	=	0.53 ESP_m(S)	28

($p < .05$)

Parhaaksi lukujonotaitojen selittäjäksi osoittautuu ESP(S). Selitysasteet vaihtelevat 20 %:n molemmin puolin. Poikkeuksen muodostaa BS-taidot, jotka ovatkin lähinnä kardinaalisisältöön kuuluvia taitoja (ks. luku V, 2. kpl).

Miten hyvin lukujonotaitojen avulla voidaan selittää IPC-kykyjä? Tähän saadaan vastaus seuraavasta taulukosta.

Taulukko V 8. IPC-kykyjen regressiomalli (N=35). Selittäjinä lukujonotaidot

Selitettävä		Selittäjät; lukujonotaidot	R^2
ESP	=	0.47 BS + 0.30 ENUM	45
ESP(O)	=	0.47 BET	22
$ESP_m(O)$	=	0.42 BEF	18
ESP(S)	=	0.45 BS + 0.33 UPTO	46
$ESP_m(S)$	=	0.37 ENUM + 0.35 BS	38
CSP	=	ei merkitseviä selittäjiä	-
CSP_m	=	0.44 SABY	19
MEASP	=	0.33 BS	11
$MEASP_m$	=	ei merkitseviä selittäjiä	-

($p < .05$)

Parhaimmillaan kykenevät lukujonotaidot selittämään spesifiä IPC-kykyä 46 % voimalla. Parhaaksi selittäjäksi ilmenee BS-taidot kuten oli nähtävissä jo korrelaatiomatriisista.

7. Missä määrin Piaget-kyvyt selittävät lukujonotaitoja?

Regressioanalyysiä varten esitetään lukujonotaitojen ja Piaget-kykyjen korrelaatiomatriisi.

Taulukko V 9. Lukujonotaitojen ja Piaget-kykyjen väliset korrelaatiot (N=35)

	UP	TO	UPTO	UPBY	DO	DOTO	DOBY	AF	BEF	BET	SABY	BS	ENUM
TTR	39*	15	41*	46**	54***	29	58***	39*	40*	63***	47**	31	56***
TSUBS	39*	29	41*	39*	56***	34*	58***	37*	40*	61***	56**	39*	52**
TIN	17	15	18	45**	18	26	46**	04	11	30	29	38*	23
TNC	34*	-01	29	63***	17	16	54***	42*	46**	41*	47**	49**	35*
TEJEC	21	04	22	55***	17	10	46**	30	38*	45**	38*	47**	20
TLC	41*	18	28	64***	33*	31	65***	42*	44**	52**	39*	40*	17
CSER	50**	23	45**	43**	45**	35*	39*	32	46**	28	33*	35*	48**

*** $p < .001$ ** $p < .01$ * $p < .05$

Todetaan, että Piaget-kyvyt ovat laajemmin ja korkeammin korreloituneet lukujonotaitoihin kuin IPC-kyvyt. Tämän ohella on havaittavissa samantyyppinen trendi kuin IPC-kykyjen tapauksessa.

Mitä korkeammista lukujonotaidoista on kysymys sitä paremmin yleisesti ottaen Piaget-kyvyt ja lukujonotaidot korreloivat keskenään. Tulokset ovat sikälikin järkeviä, että lukujen sujuva luettelu ENUM korreloi parhaiten relationaalisten kykyjen TTR, TSUBS ja SSER kanssa. Näinhän pitäisi loogisesta näkökulmasta tarkasteltuna juuri ollakin. Myös UP, UPTO, DO ja DOTO muuttujilla on vastaava ominaisuus. Tämän ohella voidaan todeta, että UPBY ja DOBY-taidot korreloivat kaikkiin Piaget-kykyihin. Tämä vihjaa kyseisten taitojen hankkimisen kompleksisuuteen. Kaikkein heikoimmin korreloi Piaget-kykyihin TO-taito. Näinhän oli myös IPC-tapauksessa. Täten on ilmeistä, että tiettyyn lukuun laskeminen lähtien ykkösestä, on varsin primitiivinen koulutulokkaiden IPC-alueelle kuuluva taito. Seuraavassa esitetään regressiomallit sille, kuinka hyvin Piaget-kyvyt kykenevät selittämään lukujonotaitoja.

Taulukko V 10. Lukujonotaitojen regressiomalli (N=35). Selittäjinä Piaget-kyvyt

Selitettävä	Selittäjät; Piaget-kyvyt	R^2
UP	= 0.43 SSER + 0.32 TLC	35
TO	= ei merkitseviä selittäjiä	-
UPTO	= 0.45 SSER	20
UPBY	= 0.48 TLC + 0.47 TNC	61
DO	= 0.56 TSUBS	31
DOTO	= 0.35 SSER	12
DOBY	= 0.37 TLC + 0.35 TNC + 0.35 TSUBS	62
AF	= 0.57 TNC + 0.42 TSUBS - 0.41 TIN	37
BEF	= 0.61 SSER + 0.37 TLC - 0.62 TIN +0.44TNC	58
BET	= 0.50 TTR + 0.32 TLC	48
SABY	= 0.49 TSUBS + 0.39 TNC	45
BS	= 0.44 TNC + 0.31 TSUBS	34
ENUM	= 0.56 TTR	31

($p < .05$)

Kuten todettu, relaationaaliset kyvyt TTR, TSUBS ja SSER ovat parhaita selittäjiä lukujen luetteluun yksipuolisemmin liittyvissä lukujonotaidoissa UP, UPTO, DO, DOTO ja ENUM. Tulos on loogi-nen! Toisaalta UPBY, DOBY taidot ovat läheisessä yhteydessä

säilyvyyskykyihin. Näissä taidoissahan on lähdettävä tietystä luvusta ja kyettävä "laskemaan" tietyn lukusanojen määrän eteen- tai taaksepäin. Täten on ymmärrettävää, että luvun kardinaali-ominaisuudella ja tätä kautta säilyvyyksillä on merkitystä ja selitysvoimaa UPBY ja DOBY-taitoihin nähden. Myös relaationaalisiin taitoihin AF, BEF, BET ja BS nähden on säilyvyyksillä TNC ja TLC selitysvoimaa. Miten hyvin kognitiiviset kyvyt yhdessä kykenevät selittämään lukujonotaitoja? Siitä seuraavassa.

8. Missä määrin kognitiiviset Piaget- ja IPC-kyvyt kykenevät yhdessä selittämään lukujonotaitoja?

Kiinnostavaa on lähinnä missä määrin IPC-kyvyt tuovat lisävoimaa taulukon V 10 selitysmalliin.

Taulukko V 11. Lukujonotaitojen regressiomalli (N=35). Selittäjinä Piaget- kyvyt ja IPC-kyvyt

Selitettävä	Selittäjät;Piaget- ja IPC-kyvyt	R^2 (%)
UP	= 0.50SSER+0.28TLC-0.38TIN+0.33ESP(S)-0.33CSP+0.31TNC	61
TO	= ei merkitseviä selittäjiä	-
UPTO	= 0.73ESP(S)+0.35SSER-0.39TIN+0.48TNC- 0.45MEASP -0.38ESP(O)+0.36TTR	71
UPBY	= 0.48TLC+0.47TNC	61
DO	= 0.55TSUBS-0.31CSP+0.30ESP_m(O)	48
DOTO	= 0.45ESP_m(S)+0.30SSER	32
DOBY	= 0.34TLC+0.32TNC+0.30ESP+0.26TSUBS	70
AF	= 0.56TNC+1.02ESP(S)-0.36CSP-0.46TIN+0.50TTR-0.75ESP_m(S)	67
BEF	= 0.58SSER+0.33ESP_m(O)+0.46TNC-0.49TIN	56
BET	= 0.40TTR+0.32ESP+0.27TLC	57
SABY	= 0.49TSUBS+0.39TNC	45
BS	= 0.60ESP(S)+0.39TNC-0.36CSP+0.26TEJEC	69
ENUM	= 0.54TTR+0.40ESP(S)+0.40SSER-0.43TIN+0.40TNC-0.36TEJEC	67

($p < .05$)

Suurimmat selityslisät verrattuna taulukon V 10 malliin tulevat muuttujille DO(+17 %), DOTO(+20 %), UP(+26 %), AF(30 %), BS(35 %) ja ENUM(36 %). Muuttujille UPBY, DOBY, ja BEF ei löydy lisäselitysvoimaa IPC-kyvyistä käytetyllä riskitasolla 5 %. Parhaat

selittäjät ovat yleensä tiedostamiseen perustuvat Piaget-kyvyt, kuten oli ennakoitua edellisten analyysien perusteella. Selitysasteet nousevat parhaimmillaan 71 % ja jäävät heikoimmillaan 32 % tasolle, kun TO jätetään huomiotta.

9. UPBY- ja DOBY-taitoihin liittyvät muistamisstrategiat

Alla olevasta taulukosta ilmenee missä määrin koulutulokkaat käyttivät kutakin muistamisstrategiaa UPBY- ja DOBY-osioissa.

Taulukko V 12. UPBY- ja DOBY-osioissa käytettyjen muistamisstrategioiden prosentuaaliset osuudet (N=35)

	UB1	UB4	DB1	DB4	UB2	UB5	DB2	DB5	UB3	UB6	DB3	DB6
0-str	23	23	31	31	51	54	54	57	69	74	71	77
1-str	0	0	3	0	11	17	14	9	14	14	11	9
2-str	77	77	66	69	0	0	0	3	0	0	0	3
3-str	0	0	0	0	17	3	9	6	9	3	6	6
4-str	0	0	0	0	20	29	26	29	11	11	14	9

0-str--ei strategiaa; 1-str--sormistrategia; 2-str--päässä korvaamisstrategia; 3-str--lueteltavaan lukuun etukäteen päässä laskemisstrategia; 4-str--päässä "kuinka mones"-strategia; UB↔UPBY ja DB↔DOBY.

Osioiden UPBY"2" ja DOBY"2" pääasiallisin strategia on korvaaminen. Havaittiin 7 lasta, jotka käyttivät tai kykenivät käyttämään sormistrategiaa jossakin tarkasteltavista osioista. Samoin havaittiin 7 lasta, jotka ainakin kerran käyttivät etukäteen-laskemisstrategiaa. 13 lasta käytti ainakin kerran "kuinka-mones" päässä-strategiaa. Tämän "korkeimman" strategian käyttö väheni siirryttäessä UPBY, DOBY"5" tehtävistä UPBY, DOBY"8" tehtäviin. Prosenttilukutaulukosta on nähtävissä, että muistamisstrategioihin liittyvässä luokittelussa UPBY, DOBY-osiot ovat ilmeisen korkeasti korreloituneita. Tämä näkyy tarkemmin seuraavasta taulukosta.

Taulukko V 13. UPBY- ja DOBY-osioiden korrelaatiomatriisi (N=35)

	UB4	DB1	DB4	UB2	UB5	DB2	DB5	UB3	UB6	DB3	DB6
UB1	84***	79***	80***	46**	44**	45**	45**	33*	28	31	28
UB4		79***	80***	46**	44**	45**	45**	34*	28	32	28
DB1			72***	59***	55***	57***	55***	41*	34*	39*	32
DB4				54***	37*	56***	56***	37*	35*	39*	35*
UB2					71***	49**	57***	70***	56***	65***	47**
UB5						55***	49**	59***	46**	56***	37*
DB2							72***	41*	47**	52**	32
DB5								51**	55***	65***	49**
UB3									52**	63***	40*
UB6										85***	81***
DB3											77***

*** p < .001 ** p < .01 * p < .05

Taulukosta nähdään, että UPBY, DOBY"2" tehtävät ovat korkeasti korreloituneita keskenään; korrelaatiot vaihtelevat välillä 0.72-0.84. Näihin liittyvät reliabiliteettiluvut ovat luonnollisesti korkeita: 0.84-0.91. Kyseisistä osioista muodostettiin summamuuttuja SUPD02. Myös osiot UPBY, DOBY"5" sekä UPBY, DOBY"8" ovat varsin korkeasti korreloituneita. Täten muodostettiin summamuuttujat SUPD05 ja SUPD08. Näitä tullaan seuraavassa selittämään Piaget- ja IPC-kyvyillä sekä muilla lukujonotaidoilla kuin UPBY ja DOBY.

10. Missä määrin Piaget- ja IPC-kyvyt sekä lukujonotaidot kykenevät erikseen ja yhdessä selittämään yhdistettyjä UPBY- ja DOBY-strategiamuuttujia SUPD02, SUPD05 ja SUPD08?

Alla olevasta taulukosta ilmenee keskeiset korrelaatiot.

Taulukko V 14. SUPD02, 5 ja 8 muuttujien korrelaatiot Piaget- ja IPC-kykyihin sekä lukujonotaitoihin (N=35)

	TTR	TSUBS	TIN	TNC	TEJEC	TLC	SSER	ESP	ESP(O)	ESP_m(O)	ESP(S)	ESP_m(S)
SUPD02	62***	59***	40*	49**	59***	55***	53***	43**	29	32	41*	35*
SUPD05	47**	41*	27	42**	57***	55***	26	53***	46**	51**	53***	41*
SUPD08	30	21	39*	52**	32	46**	23	47**	33*	23	41*	32

	CSP	CSP_m	MEASP	$MEASP_m$	UP	TO	UPTO	DO	DOTO	AF	BEF	BET	SABY	BS	ENUM
SUPD02	22	34*	33	19	66***	35*	55***	49**	35*	58***	78***	69***	58***	53***	54***
SUPD05	16	22	31	25	45**	31	46**	49**	41*	56***	56***	66***	59***	71***	43**
SUPD08	24	09	19	20	34*	15	43**	34*	40*	38*	37*	34*	57***	50**	35*

***p < .001 ** p < .01 * p < .05

Yllä olevasta taulukosta voidaan jo alustavasti sanoa "mitä tuleman pitää". Muut lukujonotaidot kuin UPBY, DOBY tulevat selittämään UPBY & DOBY strategioita parhaiten. Sitten tulevat tiedostamiseen perustuvat Piaget-kyvyt ja lopuksi IPC-kyvyt. Alla olevasta taulukosta selviää vastaus otsikon kysymykseen.

Taulukko V 15. SUPD02, 5 ja 8 regressiomallit (N=35). Selittäjinä lukujonotaidot, Piaget-kyvyt ja IPC-kyvyt

Selitettävä	Selittäjät; lukujonotaidot muut kuin UPBY ja DOBY	R^2
SUPD02	= 0.58 BEF + 0.37 BET	71
SUPD05	= 0.50 BS + 0.38 BET	61
SUPD08	= 0.57 SABY	32
"	Selittäjät; Piaget-kyvyt	
SUPD02	= 0.43 TTR + 0.28 TNC + 0.28 TLC	56
SUPD05	= 0.38 TEJEC + 0.34 TLC	40
SUPD08	= 0.41 TNC + 0.32 TLC	36
	Selittäjät; IPC-kyvyt	
SUPD02	= 0.43 ESP	18
SUPD05	= 0.92 ESP + 0.50 $ESP_m(O)$ - 0.63 $ESP_m(S)$	48
SUPD08	= 0.47 ESP	22
	Selittäjät; lukujonotaidot&Piaget-kyvyt&IPC-kyvyt	
SUPD02	= 0.56 BEF + 0.23 TTR + 0.25 TEJEC + 0.21 TO	79
SUPD05	= 0.41 BS + 0.36 BET + 0.28 $ESP_m(O)$	67
SUPD08	= 0.41 SABY + 0.33 TNC	41

($p < .05$)

Tulokset ovat loogisia. Mitä vaikeammista toiminnoista on kysymys sitä vähäisempiin selitysosuuksiin tullaan. Poikkeuksen muodostaa SUPD05, kun selittäjinä ovat IPC-kyvyt. On loogista, että IPC-kykyjen suhteen selitysaste nousee, kun siirrytään tehtävistä UPBY&DOBY"2" tehtäviin UPBY&DOBY"5". Toisaalta UPBY&DOBY"8" tehtävät osoittautuivat siinä määrin vaikeiksi, että selitysasteet eivät nouse kovin korkeiksi. Selityskyvyissä on aiemmin todettu järjestys lukujonotaidot--Piaget-kyvyt--IPC-kyvyt. Lopuksi on tärkeää todeta, että tarkastellut Piaget-kyvyt perustuvat tiedostamiskriteeriin. Mitä siitä olisi seurannut, jos olisi käytetty suoritusten oikeellisuuteen perustuvaa kriteeristöä? Tästä lyhyesti seuraavassa.

11. Käytettävien kriteerien vaikutus Piaget-kykyjen selitysvoimaan

Kolmannesta luvusta on nähtävissä, että muuttujien TR, SUBS, IN ja SER vaihtelu suorituskriteerien näkökulmasta on kovin vähäinen. Itse asiassa nämä kyvyt ovat suoritusten oikeellisuuden näkökulmasta lähes 100 %:sti koulutulokkaiden hallussa. Tilanne muuttuu, jos vaaditaan, että lapsen on kyettävä selittämään suorituksensa. Tällöin päädytään edellä käytettyihin muuttujiin TTR, TSUBS, TIN ja SSER. Tässä SSER on lähinnä prosessimuuttuja. Täten on ymmärrettävää, että jos käytetään Piaget'n omaa tiedostamiskriteeriä, päästään parempiin selitysasteisiin. Lukujonotaitojen suhteen tämä näkyi seuraavasti. Selittävinä muuttujina olivat TR, SUBS, SER, IN, EJEC ja LC, jolloin lukujonotaitojen UP, ENUM selitysosuudet putosivat "roimasti". Itse asiassa kävi niin, että UP, TO, SABY, UPTO, DO, DOTO ja AF muuttujille ei tullut käytettyjen kriteerien (F ja t-arvot vähintäin 5 %-tasolla) valossa yhtään merkitsevää selittäjää. Samoin kävi, että muuttujien DOBY, BEF, BET, BS ja ENUM selitysasteet jäivät välille 16 % - 19 %. Parhaana selittäjänä oli näissäkin EJEC lukuunottamatta ENUM muuttujaa, jossa TR oli paras ja ainut kriittisen tason ylittävä selittäjä. UPBY-muuttujaa kyettiin selittämään 32 % voimalla, mutta tässäkin on pudotusta taulukon V 10 arvoon lähes 30 %-yksikköä. Selitysosuuksien perusteella voidaan pitää Piaget'n asettamia kriteerejä operationaaliselle ajattelulle järkevinä. Kuten on nähty, on tiedostamiseen perustuvilla Piaget-kyvyillä varsin suuri selitysvoima lopa lukujonotaitoihin. Erityisesti tämä koskee kehittyneempiä lukujonotaitoja. Täten on oletettavaa, että myös aritmeettisiin suorituksiin ja strategioihin nähden on tiedostamiseen perustuvilla Piaget-kyvyillä selitysvoimaa. Tästä lähemmin seuraavan luvun kokeellisessa osassa.

VI A ARITMEETTISET PROSESSIT JA STRATEGIAT; YHTEYDET KOGNITIIVISIIN KYKYIHIN SEKÄ LUKUJONOTAITOIHIN

Aritmeettiset prosessit viittaavat tässä työssä yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä tarvittavan informaation vastaanottoon, käsittelyyn, muistamiseen ja hyväksikäyttöön. Aritmeettiset strategiat tarkoittavat tässä yhteydessä niitä ongelmanratkaisukeinoja, joita lapset käyttävät selviytyäkseen perustavista yhteen- ja vähennyslaskutyypeistä. Aritmeettisiin kykyihin liittyvä perusoperaatio on laskeminen. Tarkassa laskemisessa ovat koordinoituneet oikean ajoituksen, paikan ja lukusanojen luettelun skeemat. Kardinaalisisällössä ei laskemisella ole todellista merkitystä, ellei lapsi ymmärrä viimeksi käyttämänsä lukusanan ilmoittavan lasketun joukon alkioiden lukumäärää (esim. Gelman & Gallistel 1978, Keranto 1979, 1981, Schaeffer et al 1974). Mainitut kardinaaliperiaate (CARD) ja tarkka laskeminen (COUNT) ovat ilmeisiä edellytyksiä päteville yhteen- ja vähennyslaskutaidoille. Liittyyhän kaikkiin perustaviin yhteen- ja vähennyslaskutehtäviin kysymysosa 'kuinka monta', joka viittaa kardinaaliyhteyteen. Aiemmat tutkimukset ja käytännön koulukokemus viittaavat siihen, että yhteen- ja vähennyslaskutehtäviä ei ole syytä käsitellä yhtenä kokonaisuutena. On nimittäin niin, että lapset käyttävät erilaisia strategioita ja selviytyvät eri tavoin matemaattiselta rakenteeltaan erityyppisissä tehtävissä. Jos nyt yhdistetään erityyppiset yhteen- ja vähennyslaskutyypit, niin saattaa kadota huomattava määrä informaatiota. Erityisesti tämä koskee yhteen- ja vähennyslaskusuoritusten ja strategioiden suhdetta kognitiivisiin kykyihin (Carpenter et al 1982, Keranto 1979, 1981). Täten tässä työssä päädyttiin tarkastelemaan yksityiskohtaisesti matemaattiselta rakenteeltaan ja kysymyksen asettelultaan erityyppisten yhteen- ja vähennyslaskujen yhteydessä havaittavia aritmeettisia kykyjä sekä näiden yhteyksiä kognitiivisiin kykyihin ja lukujonotaitoihin.

1. Perustavat yhteen- ja vähennyslaskutyypit

Matemaattisen rakenteen näkökulmasta voidaan perustavat yhteen- ja vähennyslaskutyypit jakaa kolmeen kategoriaan:

A. a + b = __ tai a - b = __

B. a + __ = b tai a - __ = b

C. __ + a = b tai __ - a = b

Tässä työssä keskitytään erityisesti tyyppeihin A. ja B., joiden kysymyksen asettelut ovat pääpiirteissään seuraavat.

Tyyppi A. (Suluissa lyhenne ja englanninkielinen nimitys)

a) Tässä on m ja n objektia. Kuinka monta objektia (Combine +; COBP) on yhteensä?

b) Tässä on m objektia. Niihin lisätään n objektia. (Join +; JOIP) Kuinka monta objektia on kaikkiaan?

c) Tässä on m objektia. Niistä otetaan pois n objektia. (Separate -; SEPM) Kuinka monta objektia jää jäljelle?

Tyyppi B.

d) Tässä on m objektia. Kuinka monta objektia on (Join - ; JOIM) näihin lisättävä, jotta saataisiin n objektia?

e) Tässä on n objektia. Kuinka monta objektia on (Reverse Join -; RJOIM) näistä vähennettävä, jotta saataisiin m objektia?

f) Näkyvillä on m objektia. Objekteja on kaikkiaan (Combine -; COBM) n kappaletta. Kuinka monta objektia ei ole näkyvillä?

Mainittujen peruskysymysten ohella tutkitaan myös kvantitatiiviseen vertailuun liittyviä kykyjä. Näihin liittyvät kysymyksen asettelut ovat seuraavanlaisia:(Kaikista käytetään lyhennettä COMP)

g) Tässä on m objektia ja n objektia. Kuinka monta (Compare; COMP) objektia tässä on enemmän kuin tässä?

h) Tässä on m objektia ja n objektia. Kuinka monta (COMP) objektia tässä on vähemmän kuin tässä?

i) Tässä on m objektia. Toisia objekteja on d kappaletta (COMP) enemmän. Kuinka monta näitä objekteja on?

j) Tässä on n objektia. Toisia objekteja on d kappaletta (COMP) vähemmän. Kuinka monta näitä objekteja on?

On selvää, että mainitut tehtävät voidaan ratkaista monella eri keinolla. Sitä millaisia keinoja lapset saattavat käyttää kyseisissä tehtävissä tarkastelen seuraavassa.

2. Perustavissa yhteen- ja vähennyslaskutyypeissä käytetyt strategiat

Tarkastellaan ensin tehtävätyypeissä COBP ja JOIP ilmereviä strategioita. Nämä voidaan suhteellisen helposti luokitella kolmeen kategoriaan toimintojen ekonomisuuden nojalla: 1) pitkien toimintojen strategia (counting all strategy), 2) puolipitkien toimintojen strategia (counting on strategy), 3) tosiasiatietoon tai johdettuun tosiasiaan perustuva strategia (known fact or derived fact strategy). Kuten lukujonotaitojen yhteydessä todettiin COBP ja JOIP tehtävät ratkeavat periaatteessa jo varsin vaatimattomilla lukujonotaidoilla. Lukujonotaitojen toisen asteen lapsen pitäisi periaatteessa pystyä ratkaisemaan kyseiset tehtävät käyttämällä counting-all strategiaa. Puolipitkien toimintojen strategia edellyttää jo kehittyneempiä lukujonotaitoja (kolmas aste). Siitä ei ole selvyyttä kehittyvätkö kaikki lapset tosiasiatiedon tasolle puolipitkien toimintojen kautta. Ei ole myöskään pätevää näyttöä siitä, mitä kognitiivisia kykyjä puolipitkien toimintojen tasolle siirtyminen lapselta vaatii. Näihin toimintojen lyhentymis- ja lyhentämiskysymyksiin palaan seuraavassa kappaleessa.

Tehtävätyyppien SEPM, JOIM, RJOIM, COBM ja COMP mahdolliset ratkaisustrategiat muodostavat jo melko komplisoidun systeemin. Itse asiassa on periaatteessa yhdeksän strategiaa, joita voitaneen käyttää kyseisissä tehtävätyypeissä. Toisaalta näiden strategioiden käyttöä rajaavat luonnollisesti tehtävätyyppi, tarkasteltavien lukujen suuruus sekä niiden erotuksen suuruus.

1) Erottaa pois -strategia (separating from). Lapsi poistaa tai erottaa vähentäjän ilmoittaman määrän objekteja ja laskee loput. Tämä strategia onnistuu periaatteessa jo pitkien toimintojen tasolla. On oletettavaa, että tätä strategiaa käytetään erityisesti SEPM-tehtävissä.

2) Erottaa vähentäjään asti -strategia (separating to). Lapsi poistaa niin monta objektia, että jää vähentäjän ilmoittama määrä objekteja jäljelle. Sitten hän laskee poistetut objektit. Tämän strategian käyttö riippuu ilmeisesti vähentäjän koosta.

3) Laskee vähentäjään asti -strategia (counting to). Tämä on näkemykseni mukaan kehittyneempi muunnos edellisestä strategiasta ja edellyttää ilmeisesti, että vähentäjä on lukujen korvaamisalueella.

4) Lisää vähentäjään -strategia (adding on). Lapsi muodostaa vähentäjää kuvaavan joukon ja lisää tähän objekteja kunnes saa vähennettävän lukumäärän. Lopuksi hän laskee lisätyt objektit.

5) Yksi-yksi vastaavuus -strategia (one-one correspondence). Lapsi tekee molempia lukumääriä vastaavat jonot ja asettaa ne vastaavuuteen. Ne objektit, joille ei löydy paria lasketaan. Tämän strategian käyttö olisi luontevinta COMP tehtävissä. Toisaalta aiempien tutkimusten perusteella voi epäillä kyseisen strategian yleisyyttä (Keranto 1979, 1981).

6) Vähennettävästä alaspäin laskemisen -strategia (counting down from x by "n"). Lapsi laskee vähennettävästä vähentäjän ilmoittaman lukumäärän alaspäin. Tämä strategia edellyttää jo kehittyneempiä lukujonotaitoja, kuten edellisessä luvussa totesin.

7) Vähennettävästä vähentäjään laskemisen-strategia (count N ("from y to x")). Lapsi laskee alaspäin vähennettävästä (y) vähentäjään (x) ja määrää samalla siirtymien lukumäärän. Mikäli lukujen x ja y erotus on suuri (> 3), niin kyseisen strategian käyttö ei vaikuta ekonomiselta eikä todennäköiseltä. Jos taas lukujen erotus on pieni niin saattaa olla, että tätäkin strategiaa esiintyy.

8) Vähentäjästä vähennettävään laskemisen -strategia (count N ("from x to y")). Tämä on käänteinen strategia edelliselle. On oletettavaa, että tämä strategia on pätevä COBM -tehtävissä. Kuten kaksi edellistä strategiaa, niin tämäkin edellyttää ilmeisesti korkeampia lukujonotaitoja (ainakin kolmannen asteen taidot).

9) Tosiasiatietoon tai johdettuun tosiasiaan perustuva -strategia (known or derived fact). Mikäli lapset huomaavat esimerkiksi tehtävien JOIM ja RJOIM käänteisen suhteen, on oletettavaa, että kyseistä strategiaa esiintyy ainakin RJOIM-tehtävissä. Samoin kyseistä strategiaa esiintynee tehtävissä, joissa lukujen erotus on 1 tai 2.

3. Aritmeettisten prosessien lyhentymisen ongelma

Tarkastelen tässä kappaleessa seuraavia informaation prosessointiekonomian ja matematiikan oppimisen näkökulmasta keskeisiä ongelmia. Miksi toiset lapset suorittavat tehtävätyypin a + b =__ pitkästi objektien avulla ja toiset käyttävät puolipitkiä toimintoja? Miten havaituista pitkistä toiminnoista päästään puolipitkiin toimintoihin ja tosiasiatietoon? Tarkastelut perustuvat neuvostopsykologien ajatuksiin toimintojen lyhentymisestä sekä Fusonin ja omiin tutkimuksiini (Davidov & Andronov 1979, Galperin 1957, 1979, Fuson 1981, Keranto 1979, 1981).

Tarkastellaan esimerkiksi tehtävään 5 + 3 liittyviä aritmeettisia suoritusprosesseja. Oletetaan, että lapsi onnistuu ratkaisemaan tehtävän turvautumalla objektijoukkoihin. Informaation prosessoinnin näkökulmasta tällainen pitkä toiminto edellyttää seuraavan suunnitelman toteuttamista (Fuson 1981): luo joukko (aktuaali tai henkinen esitys) ensimmäiselle yhteenlaskettavalle(5); luo joukko toiselle yhteenlaskettavalle (3) ja sitten laske yhdistetyn joukon lukumäärä. Suunnitelman toteuttaminen vaatii sanottujen tai kirjoitettujen symbolien tunnistusta; ymmärtää ja osata muodostaa lukuja vastaavat joukot; osata laskea tarkasti; tietää mitä "plus" tai yhteensä merkitsee operationaalisesti ja ymmärtää kardinaaliperiaate. Galperinin mukaan numero ei ole pitkiä toimintoja käyttävälle vielä tehokas käsite, joka itse olisi henkisen toiminnon erityinen objekti. Toisin sanoen numero ei ole vielä merkityksellinen merkki tietylle määrälle objekteja käsitettynä yhtenä kokonaisuutena. Jos lapsi toisaalta osaa lisätä toiseen lukuun toisen luvun suoraan, ei tämä Galperinin mukaan osoita, että lapsi olisi päässyt operationaaliselle tasolle. Tämän havaitsee seuraavasti. Heti kun annetaan yhteenlaskutehtävä, jossa objektit on näkyvillä, aloittaa tällainen lapsi alusta asti yksitellen laskemisen (Galperin 1957, Keranto 1979). Tämän ohella epäonnistuminen uuden tason saavuttamisessa on Galperinin mukaan selvästi nähtävissä siitä, että tällainen lapsi ei kykene antamaan täsmällistä selvitystä toiminnastaan. Tämä on yhdenmukaista Piaget'n sisäistetylle operationaaliselle ajattelulle asettamien vaatimusten kanssa (Beth & Piaget 1966, Piaget 1976).

Mitä sitten vaaditaan lapselta, jotta hän kykenisi puolipitkään toimintoon esimerkiksi juuri tarkastellussa tehtävässä 5 + 3 = __? Ensinnäkin on ilmeistä, että lapsen täytyy tajuta lukusanan duaalimerkitys. Hänen täytyy ymmärtää, että viimeinen käytetty lukusana ilmoittaa objektien lukumäärän ja kääntäen annettu lukusana ennakoi laskemistoimintaa. Kun lapsi oppii ennakoimaan lukusanaa 5 koko laskemissegmentin (1,...,5) lyhenteenä, on yksi askel toimintojen lyhentymisen suuntaan otettu. Tämän ohella lapsen tarvitsee ilmeisesti ymmärtää ensimmäiseen yhteenlaskettavaan liittyvän laskemissegmentin ja koko summaan liittyvän laskemissegmentin inkluusiosuhde. Toisin sanoen ensimmäisen yhteenlaskettavan luettelu on kyettävä näkemään osana yhdistejoukon pitkää luettelua. Tällöin on mahdollista korvata pitkän luettelun lyhennys

("kahdeksan") puolipitkällä luettelulla (5,6,7,8) koko summaluettelun sisällä.

Vielä on yksi keskeinen ongelma, joka koskee toisen yhteenlaskettavan suuruutta. Mikäli toinen yhteenlaskettava on pienempi tai yhtäsuuri kuin kolme, ei kehittyneempiä muistamisstrategioita ilmeisesti tarvita. Sama koskee tilannetta, jossa toisen yhteenlaskettavan ilmoittama määrä on havaittavissa. Mikäli toinen yhteenlaskettava on suurempi tai yhtäsuuri kuin neljä ja ulkoisia objekteja ei ole saatavilla, aiheutuu tästä paineita lyhytaikaiseen muistiin. Siitä mitä rajoituksia informaation käsittelykapasiteetti asettaa puolipitkien toimintojen omaksumiselle ei ole tarkkaa tietoa. Joka tapauksessa suoritetun loogisen analyysin perusteella kognitiivisilla kyvyillä - Piaget-kyvyt ja informaation käsittelykapasiteetti - on merkitystä aritmeettisten prosessien lyhentymisessä. Tähän palaan seuraavassa kappaleessa ja tämän luvun kokeellisessa osassa.

Miten sitten lapsia voitaisiin auttaa siirtymään pitkistä aritmeettisista toiminnoista puolipitkiin toimintoihin? Davidov & Andronov sekä Fuson ovat tutkineet tätä ongelmaa (Davidov & Andronov 1979, Fuson 1981). Ensiksi pyritään lapsen huomio keskittämään laskemisen kardinaalimerkitykseen. Juuri kun lapsi on oscittamassa ensimmäiseen yhteenlaskettavaan liittyvän joukon viimeistä alkiota kysytään, "kuinka monta olet laskenut?" Toisin sanoen juuri kun lapsi on sanomassa tehtävässä 5 + 3 = __ "viisi" keskitetään lapsen huomio tähän sanan kardinaalimerkitykseen. Kun laskemis/kardinaalisisältö on saavutettu, "pakotetaan" lasta asteittain ennakoimaan ensimmäisen joukon luettelun lopullista osaa. Tämä ennakointi sallii Davidovin ja Fusonin mukaan lasten nähdä, että ensimmäisen joukon luettelu ei ole välttämätöntä. He alkavat laskea puolipitkästi ja saavuttavat helpommin lukujen välisten suhteiden toiminnallisen tason.

4. Kognitiivisten kykyjen merkitys aritmeettisten prosessien ja strategioiden kehittymiselle

Itse asiassa on kovin vähän yksityiskohtaista tietoa siitä, miten kognitiiviset Piaget- ja informaation kapasiteettikyvyt säätelevät aritmeettisia suoritusprosesseja ja strategioita. Loogisesti ajatellen identiteetin säilyvyydellä ja luokkien inkluusiolla pitäisi olla selviä yhteyksiä puolipitkien toimintojen omaksumiseen. Identiteetin säilyvyys on loogisena ehtona ensimmäisen yhteenlaskettavan korvaamiselle yksittäisellä symbolilla. Inkluusio on loogisesti nähtynä edellytyksenä ensimmäisen yhteenlaskettavan duaaliluonteen ymmärtämiselle. Lapsenhan pitäisi periaatteessa kyetä tarkastelemaan yhtäaikaisesti ensimmäistä yhteenlaskettavaa symbolina ensimmäiselle joukolle ja alkuosana lopulliselle koko summan luettelulle. Toisaalta Piaget-kyvyt ovat perimmältään esinumeerisia kykyjä ilman selvää liitäntää aritmeettisiin prosesseihin. Tätä varten identiteetin esinumeerisen säilyvyyden sijaan olisi ehkä järkevämpää tarkastella luvun säilyvyyttä identiteetti-tilanteessa. Luvun säilyvyyttä identiteetin tapauksessa merkitään tässä työssä lyhenteellä (NC). Traditionaalisen esinumeerisen inkluusion ohella olisi syytä tarkastella lapsen kykyä asteettaiseen summaukseen kardinaaliyhteydessä. Tässä työssä tätä kykyä merkitään lyhenteellä (PRS; progressive summation). Tällä tarkoitan sitä, että lapsi kykenee ilmoittamaan kuinka monta objektia hän on jo laskenut, kun kesken lukumäärän määrityksen tehdään osajoukon lukumäärää koskeva kysymys. Saattaa olla, että tämä muuttuja (PRS) on parempi selittäjä aritmeettisille prosesseille ja strategioille kuin Piaget'n esinumeeriset mitat.

On olemassa yksi pätevältä vaikuttava kokeellinen tutkimus, jossa on pyritty selvittämään kognitiivisten kykyjen merkitystä aritmeettisten suoritusten ja strategioiden suhteen (Carpenter et al 1982). Tämä Carpenter et al tutkimus oli suunniteltu määrittämään, vaaditaanko Piaget-kykyjä ja informaation käsittelykapasiteettia (mitattuna BDS-testillä) ratkaistaessa tiettyjä yhteen- ja vähennyslaskuongelmia. Samalla pyrittiin selvittämään tarvitaanko näitä kykyjä kehittyneempien ratkaisustrategioiden hankintaan. Tutkittavat koehenkilöt olivat kuusivuotiaita keskiluokan

amerikkalaisia lapsia. Testausmenetelmä oli yksilöhaastattelu, kuten tässäkin tutkimuksessa. Käytetyistä Piaget-mitoista (yksi-yksi vastaavuuden säilyvyys (EC), luokkien inkluusio (IN), transitiivipäättely (TR)) ja informaation käsittelykapasiteetista vain IN ja BDS luokittelivat lapset kehitysryhmiin, jotka erosivat merkittävästi toisistaan, kun aritmeettisen taidon mittana oli summapistemäärä kaikista tehtävätyypeistä. Tulokset viittasivat joskin pieneen mutta konsistenttiin suhteeseen kognitiivisten kykyjen omaamisen ja aritmeettisen ongelmanratkaisukyvyn välillä. Lapset, joilla oli jokin erityinen kognitiivinen kyky, suoriutuivat paremmin kaikissa aritmeettisissa ongelmatyypeissä, vaikka keskiarvojen erot eivät yltäneetkään kaikissa tapauksissa tilastollisesti merkitsevälle tasolle. Tulokset "vakuuttavat" Carpenterin et al mielestä, että ainakin jonkin kognitiivisen kyvyn puute saattaa ehkäistä lapsia hankkimasta päteviä ratkaisustrategioita. Toisaalta Carpenter et al varoittavat käyttämästä kognitiivisia muuttujia suoraan opetustyön valmiusindikaattoreina (vrt. Keranto 1981). Tämä johtuu ensinnäkin siitä, että kognitiiviset kyvyt kykenivät selittämään aritmeettisista suorituksista vain noin 20 %. Tämän ohella ei voitu empiirisesti todeta, että kognitiivisten kykyjen puute aina johtaisi epäonnistumiseen keskeisissä aritmeettisissa tehtävätyypeissä. On ilmeistä, että helpommissa tehtävätyypeissä (a ± b = __) lapset käyttävät havaintoon perustuvia strategioita. Tällöin he ikäänkuin ohittavat ne loogiset vaikeudet, joita tehtäviin sisältyy. Toisaalta jäi toteamatta oppivatko lapset, joilla on tietyt kognitiiviset kyvyt, syvemmällä tasolla aritmeettisia prosesseja ja strategioita. Esimerkiksi Piaget'n ja Galperinin ajatukset ajatteluprosessin tiedostamisesta jäi tutkimatta ja vertailematta pelkkään suorituskriteerillä laadittuun testistöön (Galperin 1957, Piaget 1976). Tässä työssä myös tähän kysymykseen tullaan kiinnittämään huomiota tutkimuksen kokeellisen osan mittauksissa ja niiden analyysissä.

VI B ARITMEETTISTEN PROSESSIEN JA STRATEGIOIDEN KOKEELLINEN NÄKÖKULMA

Kokeellisen osan pääongelmat ovat seuraavat:

A. Mikä on keskeisten yhteen- ja vähennyslaskutyyppien keskinäinen vaikeusjärjestys?

B. Missä määrin kognitiivisten kykyjen ja lukujonotaitojen kehittymättömyys heijastuu aritmeettisiin kykyihin ja strategioihin?

C. Missä määrin kognitiiviset kyvyt selittävät menestymistä ja strategioita keskeisissä yhteen- ja vähennyslaskutyypeissä?

D. Missä määrin ja miten lukujonotaidot ovat yhteydessä ja selittävät keskeisissä yhteen- ja vähennyslaskutyypeissä menestymistä ja strategioita?

E. Kuinka hyvin lukujonotaidot ja kognitiiviset kyvyt yhdessä kykenevät selittämään menestymistä ja strategioita keskeisissä yhteen- ja vähennyslaskutyypeissä?

Kysymyksiin etsitään vastausta prosenttianalyysien, t-testien, korrelaatioanalyysien ja regressiomallien avulla. Ennen kuin siirrytään tilastollisiin analyyseihin tarkastellaan lyhyesti käytettyä mittaria ja sen pisteytystä. Yksityiskohtaiset tehtävänasettelut on löydettävissä liitteestä VI 1.

1. Aritmeettisten kykyjen mittari sekä pisteytykset

Aritmeettisten kykyjen perusoperaatiota laskemista mitattiin kahdella osiolla COUNT1-2. Samoin kardinaaliperiaatetta tutkittiin kahden osion CARD1-2 avulla. Näistä muodostettiin suoritusten oikeellisuuteen perustuvat summamuuttujat $COUNT = \sum_{i=1}^{2} COUNT_i$ ja $CARD = \sum_{i=1}^{2} CARD_i$. Joukkojen lukumäärien vertailuun liittyviä relaationaalisia kykyjä tutkittiin kolmen osion E1-2 ja JE avulla. Näistä kaksi ensinmainittua mittaavat kykyä muodostaa joukkojen lukumääräinen ekvivalenssi ja JE mittaa kykyä muodostaa vastaavasti lukumääräinen inekvivalenssi. Lapset saivat vapaasti käyttää mieleistään strategiaa, kuten muissakin tämän luvun osioissa. Relaationaalisiin kykyihin liittyen muodostettiin kaksi summamuuttujaa EJE = E1+E2+JE ja SEJE = SE1+SE2+SJE. Ensimmäinen

muuttuja liittyy suoritusten oikeellisuuteen ja toinen käytettyihin strategioihin. Prosessimuuttujiin SE1-2 ja SJE liittyvä pisteytys on seuraava: 0-pistettä, kun ei onnistu; 1-piste, mikäli puhdas primitiivivastaavuus-strategia (2 lasta SE2:ssa ja SJE:ssä) tai mikäli yhdistetty primitiivivastaavuus- ja laskemisstrategia; 2-pistettä, mikäli sujuva laskemisstrategia (vrt. Keranto 1981). Progressiivisen summauskyvyn tutkimiseksi käytettiin kolmea osiota PRS1-3. Näistä osioista muodostettiin kaksi summamuuttujaa PRS = $\sum_{i=1}^{3} PRS_i$ ja SPRS = $\sum_{i=1}^{3} SPRS_i$. Jälkimmäinen muuttuja liittyy suoritusprosessiin ja edellinen suoritusten oikeellisuuteeen. Suoritusprosessiin liittyvä pisteytys on seuraava: 0-pistettä, mikäli ei onnistu eli unohtaa mihin piti laskea; 1-piste, mikäli aloittaa alusta, kun välikysymys esitetään; 2-pistettä, kun välikysymys ei aiheuta "muistin menetystä" eikä alusta asti uudelleen laskemista sille kuinka monta tuli jo otettua.

Kokeellisen osan keskeiset yhteen- ja vähennyslaskutyypit ovat COBM (combine +), JOIP (join +), SEPM (separate -), JOIM (join -), RJOIM (reversible join -), COBM (combine -) ja COMP (compare). Itse asiassa kyseiset lyhenteet viittaavat samalla suoritusten oikeellisuuteen liittyviin summamuuttujiin; COBP = $\sum_{i=1}^{3} COBP_i$, JOIP = $\sum_{i=1}^{3} JOIP_i$, SEPM = $\sum_{i=1}^{3} SEPM_i$, JOIM = $\sum_{i=1}^{3} JOIM_i$, $RJOIM_i$ = $\sum_{i=1}^{3} RJOIM_i$, COBM = $\sum_{i=1} COBM_i$ ja COMP = $\sum_{i=1} COMP_i$. Vastaavat strategioihin perustuvat summamuuttujat ovat SCOBP, SJOIP, SSEPM, SJOIM, SRJOIM, SCOBM sekä SCOMP.

Strategioihin liittyvä pisteytys on seuraava: 0-pistettä, kun ei ymmärrystä; 1-piste, kun jokin pitkistä strategioista; 2-pistettä, kun jokin puolipitkistä strategioista; 3-pistettä, kun tunnettu tosiasia tai johdettu tosiasia. Tämän tarkempaan luokitukseen ei tämän työn laajuuden takia ole tässä mahdollisuuksia.

Suoritusten oikeellisuuteen liittyvä pisteytys on samanlainen kuin edellisissäkin luvuissa. Toisin sanoen jokaisesta virheettömästä suorituksesta saa 1 pisteen muuten 0 pistettä. Täten suoritusten oikeellisuuteen liittyvien summamuuttujien maksimipisteet

saadaan suoraan osioiden lukumääristä. Strategioihin liittyvien summamuuttujien maksimipisteet saadaan vastaavasti kertomalla osioiden lukumäärä maksimipisteillä 3.

2. Suoritusten oikeellisuuteen perustuvat suoritusprosentit

Alla olevassa taulukossa on esitetty kunkin kardinaalista tai aritmeettista kykyä mittaavan osion oikeellisuuteen perustuvat suoritusprosentit.

Taulukko VI 1. Kardinaalis-aritmeettisten osioiden suoritusprosentit (N=35)

COUNT1	COUNT2	CARD1	CARD2	E1	E2	JE	PRS1	PRS2	PRS3	COBP1	COBP2	COBP3
94	91	100	97	89	74	83	74	86	86	94	89	91
JOIP1	JOIP2	JOIP3	SEPM1	SEPM2	SEPM3	JOIM1	JOIM2	JOIM3	RJOIM1	RJOIM2	RJOIM3	
86	80	77	91	89	80	89	83	83	97	89	91	
COBM1	COBM2	COBM3	COBM4	COBM5	COMP1	COMP2	COMP3	COMP4				
80	66	80	74	49	80	69	69	49				

Suoritusprosenttien näkökulmasta tulokset ovat johdonmukaisia lukuunottamatta PRS1 osiota, jonka prosenttiluku on alempi kuin vastaavaa kykyä mittaavien PRS2 ja 3 osioiden suoritusprosentit. On ilmeistä, että tässä on ollut aluksi vaikeuksia tottua kyselysysteemiin, vaikka systeemiä ennakoitiin suusanallisesti. Tehtävissä COBP2, JOIP2, SEPM2 on kymmenylitys tai kymmenalitus, joka näkyy lievänä suoritusprosenttien laskuna. Tehtävät COBP3, JOIP3, SEPM1, JOIM3, RJOIM3 ovat taas lukualueen lo - 20 osioita. Tästä lievä lasku suoritusprosenteissa. Sama koskee myös kardinaalisia kykyjä mittaavia osioita COUNT2, CARD2, E2 ja JE. Mitä tulee osioihin COBM, niin kymmenalitukseen liittyvä osio COBM5 oli odotetusti vaikein. Liittyyhän tähän osioon vielä suuri kaikkien palikoiden ja näkyvillä olevien palikoiden erotuksen arvo (6 = 12 - 6). Toisaalta osio COBM3 oli luonnollisesti helpoin (80 %). Tässähän oli 6 palikkaa näkyvillä ja 1 piilossa eli erotuksen arvo oli $\underline{1}$ = 7 - 6 tai 6 + $\underline{1}$ = 7 tai 6,7, josta yksi. Samaan suoritusprosenttiin yllettiin osiossa COBM1. Tässähän erotuksen arvo oli 2 = 7 - 5. Mitä COMP osioihin tulee, niin

osio COMP1 osoittautui helpommaksi kuin osio COMP2. Näin siitä huolimatta, vaikka osion COMP2 tulos olisi ollut suoraan pääteltävissä osion COMP1 tuloksesta. Itse asiassa oli 17 lasta 28 lapsesta, jotka osasivat käyttää käänteistä suhdetta kyseisten osioiden välillä hyväkseen. 7 lasta ei onnistunut osiossa COMP1. Myös tehtävien COMP3 ja 4 suoritusprosentit vihjaavat siihen, että "vähemmin kuin"-vertailu on hivenen vaikeampaa kuin "enemmän kuin"-vertailu.

3. Käytettyjen suoritusstrategioiden prosenttiluvut ja luotettavuus

Alla olevasta taulukosta ilmenee käytettyjen strategioiden suhteelliset osuuden kussakin EJE ja PRS sekä aritmeettisia kykyjä mittaavissa osioissa.

Taulukko VI 2. Käytettyjen strategioiden suhteelliset osuudet (%) kussakin PRS ja aritmeettisia kykyjä mittaavissa osioissa (N=35)

	E1	E2	JE	PRS1	PRS2	PRS3	COBP1	COBP2	COBP3	JOIP1	JOIP2	JOIP3
0-taso	6	6	6	23	11	9	3	3	6	3	6	9
1-taso	0	6	6	17	20	9	40	49	29	23	31	11
2-taso	80	60	77	60	69	82	40	37	54	43	49	66
3-taso	(14	29	11)	-	-	-	17	11	11	31	14	14

	SEPM1	SEPM2	SEPM3	JOIM1	JOIM2	JOIM3	RJOIM1	RJOIM2	RJOIM3
0-taso	9	0	0	9	9	11	3	11	9
1-taso	57	48	74	11	17	11	20	11	20
2-taso	31	29	20	3	9	40	0	0	51
3-taso	3	23	6	76	65	38	77	78	20

	COBM1	COBM2	COBM3	COBM4	COBM5	COMP1	COMP2	COMP3	COMP4
0-taso	20	31	11	23	49	17	32	25	35
1-taso	17	6	0	3	6	40	11	20	30
2-taso	26	40	80	63	31	23	3	30	11
3-taso	37	23	9	11	14	20	54	25	14

On heti syytä huomauttaa, että yllä olevan taulukon 0-tason suoritusprosentit ovat joissain kohdin hivenen matalampia kuin taulukosta VI1 pääteltävissä olevat 0-suoritukset. Tämä johtuu siitä, että strategioiden tapauksessa ei otettu huomioon huolimattomuudesta tai epätarkasta laskemisesta johtuvaa virhettä. Riitti kun

suoritusprosessi oli pätevä. Osioiden E1, E2 ja JE "3-tason" suoritusprosentit (suluissa) viittaavat lapsiin, jotka käyttivät sekastrategiaa. Toisin sanoen nämä lapset yrittivät aluksi yksi-yksi vastaavuudella, mutta jatkoivat tehtävää laskemisstrategialla. Tämä strategian vaihdos johtui siitä, että nämä lapset kadottivat otteensa yksi-yksi vastaavuuksiin, kun edettiin yli lukumäärän 6. Kuten taulukosta havaitaan, ylivoimaisesti suosituin strategia oli näissä tehtävissä laskeminen. Tämä on yhdenmukaista teorian ja aiempien tutkimusten kanssa (Keranto 1981).

PRS-osioiden kohdalla on nähtävissä lievää oppimis- tai tottumisvaikutusta. COBM-osioissa tavallisimmin käytetyt strategiat ovat pitkien toimintojen strategia tai puolipitkien toimintojen strategia. Neljästä kuuteen lasta oli näissä osioissa tosiasiatiedon tasolla. JOIP-osioissa on lievää siirtymistä puolipitkiin toimintoihin ja tosiasiatietoon päin. On mahdollista, että JOIP-tehtävän asettelu vihjaa paremmin puolipitkiin toimintoihin kuin COBP-tehtävän asettelu. Tämä tärkeä ja mielenkiintoinen huomio vaatii lisätutkimuksia. SEPM-osioissa tavallisimmin käytetty strategia on "separating from" eli "erottaa pois" strategia. Kun lukujen erotus kasvaa näyttää siitä seuraavan pitkän toiminnon prosentuaalinen nousu. Tämä näkyy SEPM3 tehtävän 1-tason prosentista. Tässä tehtävässä lukujen erotus oli 5, kun taas tehtävissä SEPM1 ja SEPM2 se oli 3 ja 2 vastaavasti. Kolme lasta käytti "counting-to" strategiaa osiossa SEPM1 ja neljä lasta osioissa SEPM2 ja SEPM3. 2-tason strategiana käytettiin "vähennettävästä alaspäin laskemisen" strategiaa. SEPM2 tehtävässä erotus oli vain 2 ja tämä näkyi heti tosiasiatiedon suoritusprosentissa. JOIM1-2 ja RJOIM1-2 osioiden lukujen erotukset olivat 1 ja 2 eli pieniä. Tämä näkyykin tosiasiatiedon prosenteissa. Toisaalta myös osioissa JOIM3 ja RJOIM3 olivat lukujen erotukset 2. Näissä tosiasiatiedon taso madaltui, johtuen korkeammasta lukualueesta. Tehtävien JOIM ja RJOIM 1-tason strategiana käytettiin "lisää vähentäjään" strategiaa (adding on). Tehtävien JOIM1-3 2 tason strategiana käytettiin "vähentäjästä vähennettävään laskemisen" strategiaa. Esimerkiksi tehtävässä JOIM2 suoritus on 7,8,9 tai 8,9, josta vastaus 2. Tehtävässä RJOIM3 käytetty

2-tason strategia oli "vähennettävästä vähentäjään laskemisen" strategia. Suoritus oli 15,15,13 tai 14,13, josta tulos 2.

Osioissa COBM käytetyt strategiat olivat seuraavia. 1-tason strategiana käytettiin sormien välityksellä "separating-to" strategiaa tai "vähentäjästä vähennettävään" strategiaa. 2-tason keinona käytettiin tehtävissä COBM2-5 "vähentäjästä vähennettävään" strategiaa. Tehtävässä COBM1 käytettiin myös "vähennettävästä vähentäjään" strategiaa (5 lasta).

COMP-tehtävissä käytetyt strategiat vaihtelivat riippuen tehtävätyypistä. Tehtävien COMP1-2 1-tason strategioina käytettiin kerran yksi-yksi vastaavuutta ja muuten "lisää vähentäjään" strategiaa. Kyseisten tehtävien 2-tason strategiana oli "vähentäjästä vähennettävään" strategia tehtävässä COMP1 ja "vähennettävästä vähentäjään" strategiaa osiossa COMP2. Tehtävän COMP3 1-tason keinona oli "laskee vähentäjään asti" strategia. Tehtävän COMP4 1-tason keinona oli joko edellä mainittu tai "separating to" strategia. Tehtävän COMP3 2-tason keinoina käytettiin "vähentäjästä vähennettävään" tai kääntäen strategioita. Tehtävässä COMP4 käytettiin 2-tason keinona "vähennettävästä vähentäjään" strategiaa.

Kuten edellä olevasta huomataan lasten käyttämät strategiat vaihtelevat tehtävätyypistä ja lukujen erotuksesta sekä lukualueesta riippuen. On silmiinpistävää, että Piaget'n ja 1970-luvun alkuopetuksen koulukirjojen suosimaa yksi-yksi vastaavuus-strategiaa käytettiin keskeisissä yhteen- ja vähennyslaskutyypeissä vain kerran. Toisin sanoen lasten spontaanit suoritusprosessit ja strategiat eivät vastaa kyseistä primitiivistä näkökulmaa (vrt. Keranto 1979, 1981).

Yllä olevat tulokset vaikuttavat järkeviltä ja suurelta osin luotettavilta. Luotettavuuden jatkotutkimiseksi määrättiin myös kyseisten osioiden (strategioihin perustuva luokittelu) korrelaatiot.

Taulukko VI 3. Keskeiset kardinaalisten ja aritmeettisten kykyjen korrelaatiot sekä näistä lasketut reliabiliteettiluvut (N=35). Korrelaatiot on ilmoitettu järjestyksessä (X1,X2), (X1,X3), (X2,X3)

muuttujat	korrelaatiot	reliabiliteettiarvo
E1,E2,JE	.71*** ,.73*** ,.54***	0.83
PRS1-3	.49** ,.26 ,.52**	0.66
COBP1-3	.84*** ,.80*** ,.67***	0.91
JOIP1-3	.74*** ,.79*** ,.70***	0.88
SEPM1-3	.61*** ,.58*** ,.52**	0.76
JOIM1-3	.88*** ,.64*** ,.74***	0.94
RJOIM1-3	.71*** ,.54*** ,.47**	0.83
COBM1-3	.52** ,.52** ,.54***	0.68
COBM4-5	.50**	0.67
COMP1-2	.59***	0.74
COMP3-4	.72***	0.84

*** $p < .001$ ** $p < .01$ * $p < .05$

Taulukon perusteella kunkin tyypin osiot ovat yleensä erittäin merkitsevästi korreloituneita. Tästä johtuen myös lasketut reliabiliteettiarvot ovat suhteellisen korkeita lukuunottamatta PRS ja COBM tyyppejä. PRS tyypin kohdalla tämä johtunee systeemiin tottumisvaikeuksista kuten aiemmin on todettu. Näissä osioissa olisi kannattanut käyttää esimerkki-instruktiota samaan tapaan kuin lukujonotaitotehtävissä (ks. liite V 1.). COBM-tehtävien osalta saattaa olla kysymys siitä, että näiden tehtävien suoritusprosessit ja strategiat riippuvat suuresti tarkasteltavasta lukualueesta sekä lukumäärien erotuksista. Toisaalta näissäkin osioissa olisi kannattanut ehkä käyttää esimerkki-instruktiota. Myös 1- ja 2-tason strategioiden erottelu oli joissain kohdin vaikeaa. Tämä koskee erityisesti osiota COMP3. Samoin oli joidenkin lasten tapauksessa vaikeaa erotella 2-tason spesifien strategioiden välillä. Tämä viimeksi mainittu huomautus ei kylläkään vaikuta jatkotuloksiin, koska jatkossa ei tulla tarkastelemaan enää 2-tason spesifien strategioiden suhteita.

4. Mikä on aritmeettisten ja kardinaalisten kykyjen keskinäinen vaikeusjärjestys?

Esitettyyn kysymykseen etsitään vastausta kahdessa osassa. Ensin tarkastellaan lukualueen 1 - 10 vaikeusjärjestystä ja sitten lukualueen 10 - 20 vastaavaa järjestystä. Kardinaalisia kykyjä edustavat näissä vertailuissa CARD, COUNT ja EJE muuttujiin liittyvät osiot. Kiinnostuksen ja vertailun vuoksi lukujonotaitoihin nähden tutkittiin myös missä määrin kardinaaliset ja aritmeettiset kyvyt ovat hierarkisoituneet. Tätä varten muodostettiin Guttmanin skaalat ja laskettiin hierarkisoitumisastetta kuvaavat arvot parametreille CR, MMR ja PPR. Alla olevasta kaaviosta selviää lukualueen 1 - 10 osioiden vaikeusjärjestys ja vakioiden CR, MMR ja PPR arvot.

CARD1→RJOIM1→COUNT1,COBP1→SEPM1→E1,SEPM2,JOIM1,RJOIM2→JOIP1 →JOIM2→COMP1,COMB3,COBM1→COBM4→COMP2,COMP3→COBM2→COMP4
CR=0.87, MMR=0.83 ja PPR=0.24

Kaavio VI1. Lukualueen 1 - 10 kardinaalisten ja aritmeettisten osioiden vaikeusjärjestys sekä vakiot CR, MMR ja PPR

Kardinaaliset ja aritmeettiset kyvyt eivät hierarkisoidu siinä määrin kuin lukujonotaidot. PPR arvo on kovin matala. Voidaan todeta, että kardinaaliperiaate ja tarkan laskemisen taito ovat pitkälti vakiintuneet koulutulokkaiden iässä lukualueella 1 - 10. Aritmeettisista kyvyistä helpoimmiksi osoittautuvat COBP ja SEPM tyypit sekä vaikeimmiksi COBM ja COMP tyypit. RJOIM, JOIM ja JOIP tyypit ovat ikäänkuin edellä mainittujen tyyppien vaikeusasteiden "välimaastossa". On mielenkiintoista havaita, että COMP-tyyppi osoittautuu systemaattisesti näin vaativaksi. Tässä piilee mahdollisesti yksi selitys lukukäsitteen oppimisvaikeuksiin. "Perustettiinhan" lukukäsitteen symbolisaation oppiminen juuri COMP-tyyppisiin tilanteisiin 1970-luvun matematiikan alkuopetuksessa. Näihin kysymyksiin palataan vielä (vrt. Keranto 1979, 1981).

Alla olevassa kaaviossa VI 2 on esitetty lukualueen 10 - 20 osioiden vaikeusjärjestys sekä hierarkisoitumisastetta kuvaavat vakioiden CR, MMR ja PPR arvot, jotka osoittautuvat samansuuruisiksi kuin kaavion VI 1 vastaavat arvot

CARD2-→COUNT2-→COBP3,RJOIM3-→COBP2-→JOIM3-→JE-→JOIP2,SEPM3
E2-→COBM5
CR=0.87, MMR=0.83 ja PPR=0.24

Kaavio VI 2. Lukualueen 10 - 20 kardinaalisten ja aritmeettisten osioiden vaikeusjärjestys sekä vakiot CR, MMR ja PPR

Lukualueen 10 - 20 järjestys on samansuuntainen kuin edellä lukualueella 1 - 10, CARD ja COUNT ovat "perustoimintoja". COBP-tyyppi osoittautuu helpoimmaksi ja COBM-tyyppi vaikeimmaksi. Tämä ei ole mitenkään yllättävää ainakaan lukujonotaitojen näkökulmasta. RJOIM, JOIM, JOIP ja SEPM tyypit osoittautuvat täälläkin eräänlaisiksi "välityypeiksi" lukualueen 10 - 20 vaikeusjärjestyksessä.

5. Aritmeettisten ja kardinaalisten kykyjen riippuvuussuhteet

Aritmeettisiin kykyihin liittyvinä summamuuttujina ovat tässä tarkastelussa COBP, JOIP, SEPM, JOIM, RJOIM, COBM ja COMP. Kardinaalisiin kykyihin liittyvät summamuuttujat ovat COUNT, SPRS ja SEJE. Prosessimuuttujat SPRS ja SEJE valittiin tähän sen takia, että niiden korrelaatiot aritmeettisiin kykymuuttujiin ovat jonkin verran korkeampia kuin vastaavien pelkästään suoritusten oikeellisuuteen perustuvien muuttujien PRS ja EJE. Card muuttujan korrelaatiot jäivät kovin pieneksi aritmeettisiin kykyihin nähden, joten näitä ei esitetä seuraavassa taulukossa.

Taulukko VI 4. Aritmeettisten ja kardinaalisten kykyjen korrelaatiot (N=35)

	JOIP	SEPM	JOIM	RJOIM	COBM	COMP	SPRS	SEJE	COUNT
COBP	43**	08	66***	44**	45**	17	43**	43**	43**
JOIP		35*	47**	50**	53***	41*	57***	61***	38*
SEPM			07	-09	40*	43**	27	30	-19
JOIM				79***	62***	14	59***	43**	48**
RJOIM					58***	24	60***	56***	65***
COBM						53***	46**	62***	29
COMP							36*	49**	11
SPRS								46**	40*
SEJE									48**

Kuten odotettua aritmeettiset kyvyt ovat yleisesti ottaen korreloituneita keskenään ja kardinaalisiin muuttujiin. Poikkeuksen muodostaa SEPM muuttuja, joka on lähinnä korreloitunut JOIP, COBM ja COMP muuttujiin. Toisen "äärimmäisyyden" muodostaa COBM muuttuja, joka on tilastollisesti korreloitunut kaikkiin muihin paitsi COUNT muuttujaan. JOIM ja RJOIM osiot olivat toisilleen käänteisiä. Tämä näkyy kyseisten tyyppien korkeassa korrelaatiossa 0.79. Ekvivalenssin ja inekvivalenssin muodostukseen liittyvä muuttuja SEJE osoittautuu varsin "moniulotteiseksi" korreloidessaan merkitsevästi kaikkiin muihin paitsi SEPM muuttujaan. Samoin osoittautuu, että muuttujalla SPRS on merkittäviä yhteyksiä aritmeettisiin kykyihin nähden. Erityisesti muuttujalla SPRS on korkea selitysvoima muuttujiin JOIP, JOIM ja RJOIM nähden.

6. <u>Missä määrin kognitiivisten kykyjen ja lukujonotaitojen kehittymättömyys heijastuu aritmeettisiin suorituksiin ja strategioihin?</u>

Kognitiivisten kykyjen edustajina käytetään tässä TEJEC, ESP(O), CSP ja MEASP muuttujia. Lukujonotaitojen edustajiksi on valittu ENUM, UPBY, DOBY ja SABY eli kehittyneemmät lukujonotaidot. Seuraavaan taulukkoon on merkitty vain ne keskiarvot, joissa havaittiin tilastollisia eroja.

Taulukko VI 5. Kognitiivisten ja lukujonotaitoryhmien suoritus-erot aritmeettisten suoritusten ja strategioiden suhteen (N=35)

	COBP	JOIP	SEPM	JOIM	RJOIM	COBM	COMP
TEJEC =0(7)					2.14		1.14
TEJEC >0(28)					** 2.90		*** 3.04
ESP(O)=0(9)	2.22	1.67				2.33	1.56
ESP(O)>0(26)	* 2.92	** 2.70				** 3.96	** 3.03
ESP(S)=0(7)	2.00	1.74		1.43	2.14	2.29	1.57
ESP(S)>0(28)	** 2.93	* 2.61		*** 2.82	** 2.90	* 3.86	* 2.93
CSP =0(14)	ei erottele; t-arvot < 2.00						
CSP >0(21)							
MEASP =0(8)		1.75					
MEASP >0(27)		* 2.63					
ENUM <2(7)	1.86	1.57	2.00	1.29	2.14	1.57	
ENUM >1(28)	*** 2.96	** 2.64	** 2.75	*** 2.86	** 2.90	*** 4.04	
UPBY <2(9)	2.22			1.78	2.22	1.78	1.22
UPBY >1(26)	* 2.92			** 2.81	** 2.92	*** 4.15	*** 3.15
DOBY <2(13)		1.92	2.15	1.85	2.31	2.08	1.54
DOBY >1(22)		** 2.73	** 2.86	** 3.00	** 3.00	*** 4.41	*** 3.32
SABY <2(16)		2.06	2.13	2.06	2.44	2.25	2.00
SABY >1(19)		* 2.74	*** 3.00	** 2.95	* 3.00	*** 4.63	** 3.21
	SCOBM	SJOIP	SSEPM	SJOIM	SRJOIM	SCOBM	SCOMP
TEJEC =0	3.43	3.43		4.57			2.00
TEJEC >0	* 5.39	** 6.14		** 7.43			** 7.11
ESP(O)=0	3.67	3.44	3.11	5.11	4.78	5.22	3.11
ESP(O)>0	* 5.46	*** 6.35	* 4.73	* 7.46	** 7.35	** 8.89	** 7.12
ESP(S)=0	3.29	3.71		4.57	4.29		
ESP(S)>0	* 5.43	** 6.10		** 7.43	** 7.29		
CSP =0	ei erottele; t-arvot < 2.00						
CSP >0							
MEASP =0	3.50	4.25					
MEASP >0	* 5.44	* 6.00					
ENUM <2	3.29	3.71		4.00	3.71	2.57	
ENUM >1	* 5.43	** 6.07		*** 7.57	*** 7.43	*** 9.29	
UPBY <2	2.89	3.56	3.11	4.44	3.89	3.11	2.00
UPBY >1	*** 5.73	*** 6.31	* 4.73	*** 7.69	*** 7.65	*** 9.62	*** 7.50
DOBY <2	3.69	3.77	3.15	4.69	4.54	3.69	2.54
DOBY >1	*** 5.77	*** 6.68	** 5.00	*** 8.14	*** 7.96	*** 10.45	*** 8.18
SABY <2	3.81	4.19	3.19	5.19	4.88	4.44	3.63
SABY >1	** 6.00	*** 6.79	*** 5.26	*** 8.26	*** 8.21	*** 10.89	*** 8.16

*** p < .001 ** p < .01 * p < .05

Taulukon VI 5 tulokset ovat kiintoisia. TEJEC kyvyn puutteella näkyy olevan yhteyksiä lähinnä RJOIM ja COMP muuttujiin. On järkevää, että nimenomaan COMP muuttuja on läheisessä yhteydessä Piaget'n "lukuun", jota TEJEC lähinnä mittaa. RJOIM tehtävissä tarvittiin käänteistä ajattelua. Piaget'n teorian mukaan näin on myös TEJEC päätelmissä. Saattaa olla, että tässä on yksi selitys havaitulle riippuvuudelle. Muiden Piaget-muuttujien merkitys aritmeettisiin kykyihin tulee esille seuraavassa kappaleessa. Laajemmin TEJEC kyvyn puute näkyy strategioiden kehittyneisyydessä. Edellisten muuttujien lisäksi tulee nyt erotteluvoimaa COBP ja JOIP muuttujien osalle (SCOBP ja SJOIP).

Kognitiivisten lukujonotaitoihin liittyvien IPC-kykyjen ESP(J) ja ESP(S) erotteluvoima kohdistuu laajemmin aritmeettisiin kykyihin ja strategioihin kuin TEJEC muuttujan tapauksessa. Toisaalta CSP ja MEASP kykyjen puutteella ei näytä olevan suurtakaan merkitystä aritmeettisten kykyjen omaksumiselle. Tämä vihjaa siihen, että käytetyt CSP ja MEASP mitat ovat liian vaikeita tai eivät ehkä mittaakaan sitä mitä niiden oli tarkoitus mitata. Tämän ohella oli monia vaihtelulähteitä, jotka mahdollisesti vaikuttavat CSP ja MEASP osioiden luotettavuuteen. Näitä asioitahan käsiteltiin luvussa IV. Tarvitaan toisin sanoen jatkotutkimuksia, jotta voidaan pätevästi sanoa mistä CSP ja MEASP osioiden erottelukyvyn puute aritmeettisten kykyjen osalta johtuu.

Kuten odotettua osoittautuvat lukujonotaidot parhaiksi ja laaja-alaisimmin erotteleviksi muuttujiksi sekä aritmeettisiin suorituksiin että strategioihin nähden. Kuten havaitaan sujuvan luettelun taidolla ENUM on erotteluvoimaa kaikkiin muihin muuttujiin paitsi COMP muuttujaan nähden. UPBY, DOBY ja SABY kykyjen puute heijastuu hyvin voimakkaasti strategioiden käyttöön. Erotteluvoima on vähintäinkin merkitsevällä tasolla lukuunottamatta SEPM muuttujaa, jossa UPBY muuttujan suhteen on "vain" melkein merkitsevä ero. Toisin sanoen ne lapset, joilla on kehittyneemmät lukujonotaidot hallussaan edes osittain, käyttävät niitä soveltuvin osin erityyppisissä aritmeettisissa tehtävätyypeissä. Nämä strategiat ovat vähintäin puolipitkien toimintojen tasolla. Ne lapset, joilla näitä taitoja ei ole hallussaan, joutuvat turvautumaan pitkiin toimintoihin tai eivät osaa tehdä mitään. Tähän

vihjaa yllä olevat tulokset ja ovat lukujen V ja VI teoriaosissa esitettyjen pohdiskelujen mukaisia. Yllä olevat tulokset tulevat ilmeisesti näkymään korrelaatio- ja regressioanalyyseissä, joihin siirryn seuraavaksi.

7. Missä määrin Piaget-kyvyt selittävät aritmeettisia suorituksia?

Regressioanalyysiä varten esitetään Piaget-kykyjen ja aritmeettisten suoritusten väliset korrelaatiot.

Taulukko VI 6. Piaget-kykyjen ja aritmeettisten suoritusten väliset korrelaatiot (N=35)

	COBP	JOIP	SEPM	JOIM	RJOIM	COBM	COMP
TTR	39*	49**	61***	35*	23	53***	62***
TSUBS	29	30	54***	30	19	45**	63***
TIN	16	23	52**	02	-11	29	34*
TNC	25	31	28	25	34*	53	40*
TEJEC	12	26	38*	18	36*	34*	66***
TLC	18	17	20	17	19	41*	65***
SSER	18	22	42*	21	13	44*	33*

***p < .001 **p < .01 *p < .05

Korrelaatiot ovat kovin mielenkiintoisia ja vahvistavat edellä sanottua. Osoittautuu, että lähinnä SEPM, COBM ja COMP-tyypit ovat läheisessä yhteydessä Piaget-kykyihin. COMP muuttuja on korrelaatiossa kaikkiin Piaget-kykyihin ja erityisen voimakkaasti TTR, TSUBS, TEJEC ja TLC muuttujiin. Tämä vahvistaa näkökulmaa, että Piaget-kyvyt liittyvät lähinnä eksplisiittisesti näkyvillä olevien joukkojen kvantitatiiviseen vertailuun. Tällaisiin vertailutilanteisiin on säilyvyysmuuttujilla merkitystä. Suhteellisen yksinkertaisiin yhteenlaskutyyppeihin COBP, JOIP ja JOIM ei Piaget'n säilyvyyksillä näytä olevan suurempia yhteyksiä. Tämä on yhdenmukaista aiempien tutkimustulosten kanssa (Keranto 1981, Carpenter et al 1982). Seuraavasta taulukosta nähdään Piaget-kykyjen selitysvoima aritmeettisiin suorituksiin nähden.

Taulukko VI 7. Aritmeettisten suoritusten regressiomalli (N=35). Selittäjinä Piaget-kyvyt

Selitettävä		Selittäjät; Piaget-kyvyt	R^2 (%)
COBP	=	0.39 TTR	15
JOIP	=	0.49 TTR	24
SEPM	=	0.47 TTR + 0.31 TIN	45
JOIM	=	0.35 TTR	12
RJOIM	=	0.36 TEJEC	13
COBM	=	0.42 TNC + 0.41 TTR	44
COMB	=	0.43 TEJEC + 0.42 TLC	56

($p < .05$)

Regressiomalli vahvistaa edellä sanottua. Ne aritmeettiset kyvyt, joihin sisältyy oleellisesti näkyvillä olevien joukkojen kvantitatiivinen vertailu selittyvät parhaiten Piaget-kyvyillä. Paras selitysaste on odotetusti COMP kykyyn nähden. Muuttujien SEPM ja COBM selitysasteet ovat myös varsin korkeita. Toisaalta odotetusti Piaget-kykyjen selitysvoima jää kovin vaatimattomalle tasolle muuttujiin COBP, JOIP, JOIM ja RJOIM liittyvien kykyjen suhteen. Nämä tehtävätyypit ovat ilmeisesti juuri niitä, joilla aritmeettisten operaatioiden symbolisaatio kannattanee aloittaa. Näin olikin maailmanlaajuisesti ennen 1970-luvun kardinaalista painotusta. Nykyisin on nähtävissä siirtymää kohti esitettyä ajatusta. Toisin sanoen joukkojen kvantitatiiviseen vertailuun perustuvat symbolisaatiot siirretään myöhemmäksi matematiikan alkuopetuksessa.

8. Missä määrin Piaget-kyvyt selittävät aritmeettisia strategioita?

Regressioanalyysiä varten esitetään Piaget-kykyjen ja aritmeettisiin strategioihin perustuvien muuttujien väliset korrelaatiot.

Taulukko VI 8. Piaget-kykyjen ja aritmeettisten strategioiden väliset korrelaatiot (N=35)

	SCOBP	SJOIP	SSEPM	SJOIM	SRJOIM	SCOBM	SCOMP
TTR	.50**	.67***	.48**	.46**	.41*	.61***	.62***
TSUBS	.45**	.57***	.58***	.37*	.37*	.57***	.71***
TIN	.36*	.35*	.41*	.20	.16	.34*	.28
TNC	.42*	.48***	.28	.47**	.47**	.50**	.33**
TEJEC	.47**	.56***	.40*	.45**	.37*	.34*	.68***
TLC	.41*	.47**	.44**	.42*	.41*	.43**	.58***
SSER	.37*	.37*	.37*	.41*	.37*	.48**	.29

***p < .001 **p < .01 *p < .05

Kyseinen taulukko vihjaa, mitä tuleman pitää! On kovin mielenkiintoista, että tiedostamiskriteeriin perustuvat Piaget-kyvyt ovat näin laaja-alaisesti tekemisissä käytettyjen aritmeettisten strategioiden kanssa. Kun edellä oli pitkälti kysymys määrästä, on tässä kysymys laadusta. Katsotaan nyt kuinka hyvin Piaget-muuttujat kykenevät selittämään näitä laadullisiin suorituksiin perustuvia muuttujia SCOBP-SCOMP.

Taulukko VI 9. Strategioihin perustuvien aritmeettisten muuttujien regressiomalli (N=35). Selittäjinä tiedostamiseen perustuvat Piaget-kyvyt

Selitettävä	=	Selittäjät; Piaget-kyvyt	R^2 (%)
SCOBP	=	0.50 TTR	25
SJOIP	=	0.58 TTR + 0.31 TNC	53
SSEPM	=	0.58 TSUBS	34
SJOIM	=	0.37 TNC + 0.35 TTR	34
SRJOIM	=	0.47 TNC	22
SCOBM	=	0.51 TTR + 0.36 TNC	49
SCOMP	=	0.48 TSUBS + 0.41 TEJEC	61

(p < 0.05)

Aritmeettisten suoritusten oikeellisuusmalliin (taulukko VI 7) verrattuna on tarkasteltavassa mallissa selitysosuuden nousua

kaikissa muissa paitsi SEPM muuttujan tapauksessa. Suurimmat prosentuaaliset nousut havaitaan yhteenlaskutyypeissä JOIP ja JOIM (29 % ja 22 %). Täten Piaget-kyvyt ovat näissä yhteenlaskutyypeissä yhteydessä ongelmanratkaisun laadullisiin tekijöihin, strategioihin. Tulos vihjaa suuntaan, että ne lapset, jotka säilyttävät ja kykenevät selittämään transitiivipäätelmiä, ovat saavuttaneet toimintojen ekonomian kannalta kehittyneempiä strategioita. Sama koskee muuttujia SCOBM ja SCOMP. Muuttujien SCOBP ja SRJOIM selitysasteet jäävät edelleen vähäisiksi.

On syytä huomauttaa, että jos olisi käytetty suorituksen oikeellisuuteen perustuvia Piaget-muuttujia TR, SUBS, IN, SER, EJEC ja LC olisivat tarkastellut selitysasteet kovin vähäisiä. Muuttujille SCOBP, SJOIM, SRJOIM ja SCOBM ei olisi löytynyt yhtään merkitsevää selittäjää. Paras selitysaste olisi ollut muuttujalla SCOMP (34 %/EJEC), kuten taulukon VI 9 mallissakin. Carpenter et al sekä Hiebert ovat käyttäneet tutkimuksissaan suorituksen oikeellisuuteen perustuvaa kriteeriä kuten tämänkin tutkimuksen tekijä aiemmissa töissään (Carpenter et al 1982, Hiebert 1981, Keranto 1981). Tällöin selitysasteet jäävät juuri mainitulle tasolle.

9. Missä määrin IPC-kyvyt selittävät aritmeettisia suorituksia?

Regressioanalyysiä varten esitetään IPC-kykyjen ja aritmeettisten suoritusten väliset korrelaatiot.

Taulukko VI 10. IPC-kykyjen ja aritmeettisten suoritusten väliset korrelaatiot (N=35)

	COBP	JOIP	SEPM	JOIM	RJOIM	COBM	COMP
ESP	.40*	.51**	.38*	.48**	.33*	.63***	.46**
ESP(O)	.35*	.48**	.35*	.31	.21	.46**	.29
$ESP_m(O)$	.34*	.36*	.02	.51**	.47**	.31	.37*
ESP(S)	.35*	.48**	.32	.50**	.37*	.57***	.45**
$ESP_m(S)$	.44**	.60***	.36*	.52**	.33*	.55***	.40*
CSP	.03	.26	.19	.04	.12	.10	.13
CSP_m	.14	.29	.14	.21	.21	.39*	.24
MEASP	.19	.41*	.27	.12	.28	.23	.34*
$MEASP_m$	.04	.26	.07	.14	.12	.31	.27

***p < .001 **p < .01 *p < .05

Yllä olevan taulukon tulokset ovat yhdenmukaisia taulukon VI 5. tulosten kanssa. Lukujonosisältöön liittyvät IPC-kyvyt ovat täälläkin yhteydessä aritmeettisiin suorituksiin. Korkeimmat korrelaatiot havaitaan muuttujien JOIP ja COBM tapauksessa. SEPM muuttujalla näyttäisi olevan vähiten yhteyksiä IPC-kykyihin. Laskemiseen ja mittalukuyhteyteen liittyvillä IPC-kyvyillä on täälläkin varsin vähäisiä yhteyksiä aritmeettisiin suorituksiin. IPC-kykyjen selitysvoima aritmeettisiin suorituksiin nähden ei tule nousemaan kovin korkeaksi.

Taulukko VI 11. Aritmeettisten suoritusten regressiomalli (N=35). Selittäjinä IPC-kyvyt

Selitettävä	=	Selittäjät; IPC-kyvyt	R^2 (%)
COBP	=	0.40 $ESP_m(S)$	19
JOIP	=	0.60 $ESP^m(S)$	36
SEPM	=	0.38 ESP^m	14
JOIM	=	0.36 $ESP_m(S)$ + 0.34 $ESP_m(O)$	36
RJOIM	=	0.47 $ESP^m(O)$	22
COBM	=	0.63 ESP^m	40
COMP	=	0.46 ESP	21

(p < .05)

Tulokset ovat loogisia. Muuttujien COBP ja SEPM selitysasteet ovat vähäisimpiä. Näinhän pitäisi periaatteessa ollakin, koska

näissä tyypeissä selvitään käsillä olevien palikoiden avulla. JOIP, JOIM ja COBM muuttujien korkeamnat selitysprosentit vihjaavat suurempaan informaation käsittelyrasitukseen. Näinhän on, mikäli henkilö yrittää käyttää puolipitkiä muistiin perustuvia toimintoja. IPC-kykyjen selitysvoima on samaa suuruusluokkaa kuin Piaget-kykyjen selitysvoima, mutta kohdistuu osin eri muuttujiin. Piaget-kykyjen selitysvoima kohdistui lähinnä SEPM, COBM ja COMP muuttujiin, kun taas IPC-kykyjen selitysvoima näyttää kohdistuvan lähinnä JOIP, JOIM ja COBM muuttujiin, kuten todettu. COMP muuttujan osalta IPC-kykyjen selitysvoima jää vähäiseksi.

10. Missä määrin IPC-kyvyt selittävät aritmeettisia strategioita?

Regressioanalyysiä varten esitetään IPC-kykyjen ja aritmeettisiin strategioihin perustuvien muuttujien väliset korrelaatiot.

Taulukko VI 12. IPC-kykyjen ja aritmeettisten strategioiden väliset korrelaatiot (N=35)

	SCOBP	SJOIP	SSEPM	SJOIM	SRJOIM	SCOBM	SCOMP
ESP	.60***	.50**	.36*	.44**	.49**	.61***	.41*
ESP(O)	.21	.42*	.14	.40*	.45**	.37*	.28
ESP_m(O)	.13	.32	.04	.56***	.49***	.31	.30
ESP(S)	.49**	.45**	.23	.42*	.43**	.54***	.37*
ESP_m(S)	.52**	.49**	.27	.45**	.43**	.52**	.31
CSP	.31	.12	.05	.02	.04	.18	.09
CSP_m	.34*	.33**	.14	.20	.26	.48**	.34*
MEASP	.44**	.35*	.04	.21	.12	.21	.28
$MEASP_m$	.37*	.17	.03	.22	.21	.24	.22

*** $p < .001$ ** $p < .01$ * $p < .05$

Yllä olevan korrelaatiomatriisin perusteella on nähtävissä, että IPC-kykyjen selitysvoima kasvaa lähinnä muuttujien SCOBP, SRJOIM ja SCOBM tapauksessa. Tämä nähdään tarkemmin seuraavasta taulukosta.

Taulukko VI 13. Strategioihin perustuvien aritmeettisten muuttujien regressiomalli (N=35) Selittäjinä IPC-kyvyt

Selitettävä	= Selittäjät; IPC-kyvyt	R^2 (%)
SCOBP	= 0.51 ESP + 0.29 MEASP	43
SJOIP	= 0.50 ESP	25
SSEPM	= 0.36 ESP	13
SJOIM	= 0.56 $ESP_m(0)$	31
SRJOIM	= 0.37 $ESP^m(0)$ + 0.36 ESP	36
SCOBM	= 0.51 ESP^m + 0.31 CSP_m	46
SCOMP	= 0.41 ESP	17

($p < .05$)

Kuten sanottu selitysvoiman kasvu kohdistuu muuttujille SCOBP (+24 %) , SRJOIM (+14 %) ja SCOBM (+6 %). Muuttujan SJOIP selitysosuudessa tapahtuu laskua (-11 %) verrattuna taulukon VI 11 malliin. Muuttujien SCOBP ja SCOBM selitettävyyden kasvu johtuu lähinnä muuttujien MEASP ja CSP_m lisääntyneestä selitysvoimasta. Yhteenvetona voidaan todeta, että IPC-kykyjen selitysvoima aritmeettisiin suorituksiin ja strategioihin jää yleensä alle 40 % tason. Poikkeuksen muodostaa COBM muuttuja, johon IPC-kyvyillä on odotetusti suurin selitysvoima.

11. Missä määrin lukujonotaidot selittävät aritmeettisia suorituksia?

Regressioanalyysiä varten esitetään seuraava korrelaatiomatriisi.

Taulukko VI 14. Lukujonotaitojen ja aritmeettisten suoritusten korrelaatiot (N=35)

	COBP	JOIP	SEPM	JOIM	RJOIM	COBM	COMP
UP	46**	22	17	57***	34**	56***	45**
TO	10	07	19	12	-07	31	03
UPTO	31	36*	38*	58***	36*	69***	47**
UPBY	27	30	27	46**	40*	70***	57***
DO	36*	34*	39*	54***	38*	62***	48**
DOTO	27	20	28	36*	21	58***	40*
DOBY	30	38*	47**	52**	43**	79***	67***
AF	25	32	31	43**	39*	63***	58***
BEF	52**	38*	10	76***	69***	71***	47**
BET	39*	44**	40*	36*	31	67***	58***
SABY	28	46**	50**	47**	38*	74***	44**
BS	26	42*	40*	32	28	59***	64***
ENUM	66***	42*	40*	68***	49**	72***	34*

*** p < .001 ** p < .01 * p < .05

Korrelaatiot ovat johdonmukaisia ja tukevat aiemmin esitettyjä teoreettisia pohdiskeluja. Kuten ennakoitua ovat lukujonotaidot hyvin läheisessä yhteydessä aritmeettisiin kykyihin. Selitysasteet tulevat nousemaan varsin korkeiksi erityisesti muuttujien JOIM, RJOIM, COBM sekä COMP osalta.

Taulukko VI 15. Aritmeettisten suoritusten regressiomalli (N=35). Selittäjinä lukujonotaidot.

Selitettävä = Selittäjät; lukujonotaidot	R^2 (%)
COBP = 0.66 ENUM	44
JOIP = 0.46 SABY	22
SEPM = 0.57 SABY - 0.60 BEF + 0.49 AF	38
JOIM = 0.93 BEF - 0.48 AF + 0.35 ENUM	73
RJOIM = 1.74 BEF - 1.33 UP - 0.27 TO +0.26DO	86
COBM = 0.56 DOBY + 0.39 ENUM	72
COMP = 0.45 DOBY + 0.37 BS	55

Yksinkertaisimman yhteenlaskutyypin COBP paras selittäjä on lukujen sujuva luettelu ENUM. JOIP ja SEPM muuttujien parhaaksi

selittäjäksi nousee SABY eli kyky luetella lukuja tietyin välein. JOIM ja RJOIM tyyppien parhaaksi selittäjäksi nousee BEF taito. Tämä on luonnollista ottaen huomioon JOIM ja RJOIM tehtävien luonteen. Yksinkertaisimmat näistä tehtävistä oli ratkaistavissa suoraan AF tai BEF taidoilla. COBM ja COMP muuttujien parhaaksi selittäjäksi tulee odotetusti DOBY taidot, jotka olivat korkeasti korreloituneita UPBY taitojen kanssa. On myös loogista, että BS taidot ovat lähinnä yhteydessä COMP tyyppiin, kuten on nähtävissä taulukoista VI 14 ja 15. Mikäli tutkimuksen otoskoko olisi ollut suurempi (esim. 60 lasta), on mahdollista, että lukujonotaitojen selitysvoima olisi myös JOIM ja COBM muuttujien osalta ylittänyt 80 % rajan.

12. Missä määrin lukujonotaidot selittävät aritmeettisia strategioita?

Regressioanalyysiä varten esitetään seuraava korrelaatiomatriisi.

Taulukko VI 16. Lukujonotaitojen ja aritmeettisten strategioiden korrelaatiot (N=35)

	SCOBP	SJOIP	SSEPM	SJOIM	SRJOIM	SCOBM	SCOMP
UP	.48**	.46**	.37*	.54***	.61***	.60***	.40*
TO	.27	.26	.32	.19	.29	.40*	.28
UPTO	.56***	.56***	.46**	.63***	.59***	.72***	.46*
UPBY	.52**	.68***	.55***	.60***	.68***	.70***	.60***
DO	.42*	.48**	.56***	.58***	.53***	.74***	.54***
DOTO	.38*	.31	.40*	.44**	.46**	.52**	.29
DOBY	.57***	.65***	.63***	.61***	.67***	.81***	.67***
AF	.50**	.52**	.41*	.49**	.53***	.66***	.55***
BEF	.52**	.56***	.32	.74***	.82***	.72***	.46**
BET	.58**	.57***	.46**	.46**	.47**	.68***	.65***
SABY	.60***	.68***	.70***	.58***	.64***	.81***	.63***
BS	.49**	.59***	.59***	.53***	.51**	.63***	.70***
ENUM	.46**	.46**	.36*	.54***	.60***	.74***	.33*

*** $p < .001$ ** $p < .01$ * $p < .05$

Strategioihin perustuvien muuttujien riippuvuusluvut ovat jonkin verran yleisesti ottaen kohonneet verrattuna taulukon VI 14

vastaaviin lukuihin. Tämä heijastunee aritmeettisten muuttujien selitysasteisiin, jotka on nähtävissä alla olevassa taulukossa.

Taulukko VI 17. Aritmeettisten strategioiden regressiomalli (N=35). Selittäjinä lukujonotaidot

Selitettävä	= Selittäjät; lukujonotaidot	R^2
SCOBP	= 0.40 SABY + 0.36 BET	45
SJOIP	= 0.43 SABY + 0.42 UPBY	57
SSEPM	= 0.70 SABY	49
SJOIM	= 1.09 BEF - 0.68 UP + 0.37 UPTO	68
SRJOIM	= 0.96 BEF + 0.34 SABY - 0.41 AF	78
SCOBM	= 0.32 DOBY + 0.23 ENUM + 0.32 SABY + 0.22 UPTO	84
SCOMP	= 0.48 BS + 0.39 DOBY	59

Tyyppien SCOBP, SJOIP ja SSEPM paras selittäjä on SABY taito. Toisin sanoen lukujen luettelulla tietyin välein on yhteyksiä kyseisissä tehtävätyypeissä käytettyihin keinoihin. Tyyppien SJOIM ja SRJOIM paras selittäjä on BEF taito. Tämä on ymmärrettävää, koska näiden tehtävätyyppien ratkaisut voidaan pohjata juuri seuraaja-edeltäjä ideoille. SCOBM tyypin paras selittäjä on odotetusti DOBY. Tämäkin on loogisesti järkevää, koska kyseisen tyypin tehtävissä käytetään juuri UPBY, DOBY taitoja. Tyypin SCOMP paras selittäjä on odotetusti BS taito. Tämäkin on kovin järkevää ottaen huomioon COMP ja BS tehtävien matemaattisen rakenteen yhtäläisyyden. Missä määrin lukujonotaidot ja kognitiiviset kyvyt yhdessä kykenevät selittämään aritmeettisia suorituksia ja strategioita? Siitä seuraavassa.

13. Kuinka hyvin lukujonotaidot ja kognitiiviset kyvyt yhdessä kykenevät selittämään aritmeettisia suorituksia?

Kysymykseen pyritään vastaamaan seuraavan regressiomallin avulla.

Taulukko VI 18. Aritmeettisten suoritusten regressiomalli (N=35). Selittäjinä lukujonotaidot sekä kognitiiviset kyvyt

Selitettävä	= Selittäjät; lukujonotaidot sekä kognitiiviset kyvyt	R^2(%)
COBP	= 0.66 ENUM	44
JOIP	= 0.50 ESP(S) + 0.29 SABY	44
SEPM	= 0.39 TTR^m + 0.30TIN+0.33SABY-0.68BEF+0.51AF	66
JOIM	= 1.05 BEF-0.53AF+0.45ENUM-0.32SSER	81
RJOIM	= 1.74 BEF-1.33UP-0.27TO+0.26DO	86
COBM	= 0.45 DOBY+0.26ENUM+0.24UPTO+0.19CSP	77
COMP	= 0.39 DOBY+0.27TEJEC+0.39BS+0.28TTR^m - 0.31SABY	72

Kognitiiviset kyvyt kykenevät jossain määrin nostamaan joidenkin aritmeettisten tyyppien selitystä verrattuna taulukon VI 15 selityksiin. Suurimmat selityslisät tulevat JOIP, SEPM ja COMP tyypeille (22 %, 28 % ja 17 % vastaavasti). Myös tyyppien JOIM ja COBM selitysosuudet kasvavat jonkin verran (7 % ja 5 %). Regressiomalli tukee aiemmin esitettyjä pohdiskeluja. Samalla on nähtävissä miten monimuotoisista ongelmista aritmeettisissa tehtävätyypeissä SEPM-COMP on kysymys. Toisaalta jo ennalta yksinkertaisimmiksi tehtävätyypeiksi todetuilla COBP ja JOIP on varsin yksinkertaiset regressiomallit. Nämä ovat nähdäkseni ne tehtävätyypit, joilla matematiikan alkuopetuksen aritmeettisten operaatioiden symbolisaatio kannattaa aloittaa. Toisaalta SEPM ja COMP tyyppeihin näyttäisi liittyvän läheisesti Piaget-kyvyt ja erityisesti COMP tyyppiin säilyvyysongelmat. Kuten jo aiemmin todettu, kannattaisi harkita COMP tyypin siirtämistä opetuksen myöhempään vaiheeseen. Näin on, mikäli otetaan huomioon lasten spontaanit prosessit ja strategiat. Loogisuudestaan huolimatta on taulukon VI 18 mallia pidettävä lähinnä viitteellisenä. On pidettävä mielessä, että tässä mallissa selittävien muuttujien määrä (27) on jo lähellä koehenkilöiden määrää.

14. Kuinka hyvin lukujonotaidot sekä kognitiiviset kyvyt yhdessä selittävät aritmeettisia strategioita?

Edellisten analyysien perusteella on oletettavaa, että strategioihin perustuvien aritmeettisten muuttujien selitysasteet tulevat olemaan varsin korkeita. Taulukkoon VI 17 verraten on odotettavissa, että nimenomaan SSEPM ja SCOMP muuttujien selitysasteet tulevat nousemaan. Olivathan Piaget-kyvyt läheisessä yhteydessä kyseisten tehtävätyyppien strategioihin.

Taulukko VI 19. Aritmeettisten strategioiden regressiomalli (N=35). Selittäjinä lukujonotaidot ja kognitiiviset kyvyt

Selitettävä	= Selittäjät; lukujonotaidot ja kognitiiviset kyvyt	R^2 (%)
SCOBP	= 1.25 ESP+0.32 TEJEC+ 0.37 UP-0.89 ESP(S)	63
SJOIP	= 0.32 SABY + 0.38 TTR + 0.31 UPBY	68
SSEPM	= 0.49 SABY + 0.36 TSUBS - 0.33 CSP_m + 0.28 BS - 0.40 BEF + 0.33 UPBY	72
SJOIM	= 0.43 BEF + 0.34 $ESP_m(0)$ + 0.30 SABY	69
SRJOIM	= 0.84 BEF + 0.62 SABY - 0.34 AF - 0.34 TSUBS +0.29 $ESP_m(0)$ + 0.38 TTR -0.25 MEASP - 0.33 DO	58
SCOBM	= 0.29DOBY+0.37CSP_m+0.20UPTO+0.44DO-0.18TSUBS -0.17$MEASP_m$+0.53ESP+0.13TNC-0.34ESP(S)	94
SCOMP	= 0.40 TSUBS + 0.40 BS - 0.38 ENUM + 0.34 AF + 0.24 TEJEC + 0.37 DO - 0.29 UP	87

Taulukkoon VI 17 verraten suurimmat selityslisät tulevat muuttujien SCOBP, SSEPM ja SCOMP osalle (+18 %, +23 % ja +28 %). Parhaimmat yksittäiset selittäjät ovat lähinnä lukujonotaitoihin kuuluvia; SABY ja BEF taidot, kuten oli odotettavissa. SCOMP muuttujan paras selittäjä kuuluu Piaget-kykyihin kuten oli odotettavissa. Toisaalta myöskin taulukon VI 19 regressiomalliin täytyy suhtautua lähinnä viitteellisesti, koska tässäkin mallissa selittävien muuttujien määrä (27) on lähellä koehenkilöiden lukumäärää.

Mittauskyvyt viittaavat mittaamisen yhteydessä havaittaviin prosesseihin. Mittaus voidaan määritellä prosessina, missä johonkin objektiin liitetään tietty luku, jota kutsutaan mittaluvuksi. Tästä näkökulmasta nähtynä myös lukumäärän määritys on eräs spesifi mittausprosessi. Tässä tapauksessa on olemassa "valmis" mittayksikkö, luonnollinen luku yksi. Nämä kardinaaliyhteydessä havaittavat "mittausprosessit" poikkeavat kuitenkin suuresti jatkuvien suureiden yhteydessä havaittavista mittaamisprosesseista, joita tämän luvun tarkastelu koskee.

Normaalissa mittalukuyhteydessä mittaluku kertoo "kuinka moneen" yksikköön jokin jatkuva suure on jaettu. Toisin sanoen mitattaessa jatkuvia suureita tarvitsee tunnistaa tai "luoda" yksikkö tai yksiköitä, joihin jokin mitattava dimensio on jaettava. Juuri tämä osittaminen ja yksikön iteraatio ovat keskeisiä mittaamistoiminnassa. On mielenkiintoista havaita, että itse asiassa kaikki suureet voidaan "mitata" samoilla luvuilla, kunhan vain mittayksikkö on kiinnitetty. Suureella tarkoitetaan tässä ei-tyhjää joukkoa P, jossa on annettu jokin järjestysrelaatio ($<$) ja liittämisoperaatio ($+$) siten, että liittämisoperaatiolle on voimassa normaalit vaihdannaisuuden ja liitännäisyyden lait sekä ominaisuudet $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ ja $a < b \Leftrightarrow \exists_c (a+c=b)$. Lisäksi vaaditaan, että jokaiselle $a \in P$ ja $n \in N^+$ on olemassa $b \in P$ siten, että $a = n \cdot b$ ja että joukon P alkiot ovat äärellisiä (Arkhimedeen ominaisuus) (ks. tarkemmin Freudenthal 1973, 199 - 206). Tämän työn näkökulmasta viitatkoon joukko G pituus-suureeseen. Valitaan jokin pituus $e \in P$ kyseisen systeemin mittayksiköksi. Olkoon nyt mikä tahansa $a \in P$, niin voimme esittää $a = r \cdot e$, missä $r \in R^+$. Toisin sanoen voimme esittää jokaisen joukon P alkion mittayksikön e reaalisena monikertana. Merkitään pituuden (pituusluokka) $a \in P$ mittaa mittayksikön e suhteen $m(a)$. Tällöin on voimassa seuraavat mittasysteemin karakteristiset ominaisuudet: 1) $m: P \to R^+$ 2) $m(e) = 1$, 3) $a < b \Rightarrow m(a) < m(b)$, 4) $m(a+b) = m(a) + m(b)$ ja 5) $m(t \cdot a) = tm(a)$, $t \in Q^+$.

Ominaisuudet 1) - 4) luonnehtivat yksikäsitteisesti kuvauksen m. Jos yksikkö e korvataan toisella yksiköllä e' = t e, niin saadaan pituudelle a uusi mitta $m'(a) = t^{-1}m(a)$. Käytännössä tämä viimeksi mainittu tarkoittaa, että jos mittayksikön kokoa suurennetaan ($t > 1$), niin vastaavasti mittaluku pienenee.

1. Pätevän pituuden mittauskyvyn vaatimukset

Psykologisesta näkökulmasta mittaamisessa on kysymys määrittelyalueen (joukko P) toimintojen liittämisestä numeerisiin arvoalueen (R^+) toimintoihin ja kääntäen. Tätä kuvaa mittasysteemin 1) karakteristinen ominaisuus. Osborne kutsuu tätä sisäiseksi transfer-ongelmaksi (Osborne 1976). On tärkeää korostaa, että emme voi puhua todellisesta mittaamisesta, ennen kuin molemman tason toiminnot on liitetty pätevästi toisiinsa. Tästä seuraa, että lasten mittauskyvyn kehitystä on syytä tarkastella kaksisuuntaisena tapahtumana. Toisin sanoen pitäisi tutkia, mitkä ovat oleellisten mittaukseen liittyvien esinumeeristen toimintojen yhteydet numeerisiin toimintoihin ja kääntäen.

Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa lapsen on mitattava mittakepin e avulla jonkin objektin pituus. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että mitattava objekti $a = n \cdot e$, missä $n \in N^+$ ja että jakoa tasaosiin $a = b_1 + \ldots + b_n$ ei ole vielä suoritettu. Tässä tulee näkyviin keskeinen ero laskemisen ja mittaamisen välillä. Lapsen on itse suoritettava jako tasaosiin, joista jokainen osa on yhtäpitkä kuin mittakeppi e. On ilmeistä, että lapsen on todettava ajatuksissaan, että $b_i = b_j$ kun $i,j = 1,\ldots,n$. Tämä edellyttää loogisesti ajatellen transitiivipäätelmän hallintaa ja sitä, että lapsi pitää mittakeppiä vakiona siirrettäessä sitä paikasta toiseen. Täten ei ole ihme, että Piaget'n koulukunta pitää pituuden säilyvyyttä ja kykenevyyttä transitiivipäätelmiin yhtenä operationaalisen mittauskyvyn edellytyksenä. Piaget esittää lisäksi, että prosessin näkökulmasta operationaalinen mittaus vaatii paikan vaihdon ja osittamisen skeemojen synteesiä (Piaget et al 1960). Tämän ohella on ymmärrettävää, että loogisesti ajatellen lasten pitäisi ymmärtää, että kokonaisuus on osiensa summa ja suurempi kuin mikä tahansa osistaan. Toisin sanoen lasten

pitäisi tunnistaa, että jos pituus a voidaan rakentaa pituuksista b_i, i=1,...,n, niin $\sum_{i=1}^{n} b_i$ peittää täsmälleen saman pituuden kuin pituus a. Samalla $\sum_{i=1}^{k} b_i < \sum_{i=1}^{l} b_i$, kun k<l. Toisaalta nämä esinumeeriset operaatiot on liitettävä numeerisiin operaatioihin siten, että saavutetaan karakterististen ominaisuuksien 3) - 5) kuvaama tilanne. Tämän ohella lapsen on ilmeisesti opittava ymmärtämään yksikön koon ja vastaavan mittaluvun välisen käänteisen suhteen ongelma. Miten sitten kyseiset ominaisuudet kehittyvät ja miten niitä on mitattu? Tästä seuraavassa.

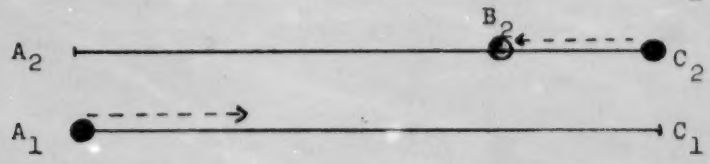
2. Mittauskyvyn kehitys esinumeerisissa yhteyksissä

Tämän työn näkökulmasta on järkevää aluksi tarkastella niitä tutkimuksia, jotka ovat perimmältään kohdistuneet esimittauksellisiin tai esinumeerisiin toimintoihin. Kuten aiemmin on todettu, Piaget sitoo mittauskyvyn kehityksen säilyvyyksien ja relationaalisten päätelmien kehitykseen. Piaget'n mukaan mittaamiseen liittyvät esinumeeriset operaatiot kehittyvät myöhemmin kuin kardinaaliyhteyteen liittyvät operaatiot. Tämä johtuu lähinnä mitattavan objektin osittamiseen ja yksikön paikanvaihtoon liittyvistä ongelmista (Piaget et al 1960). Itse asiassa tämä siirtymä oli näkyvissä, kun tarkastelin epäjatkuvien ja jatkuvien objektien säilyvyyksiin liittyviä ongelmia (luku III). Esinumeeristen operaatioiden näkökulmasta tärkeitä toimintoja ovat siis mitattavan objektin osittamiseen liittyvät ongelmat sekä "peittämisongelmat". Kuten kardinaaliyhteydessä niin tässäkin on syytä erottaa identiteettiin ja ekvivalenssitilanteeseen liittyvät mittauskyvyt. Piaget pitää molempia toimintoja samanarvoisina sekä loogisesta että kehityksellisestä näkökulmasta tarkasteltuna (vrt. III ja IV luku).

Identiteetin tapauksesta on kovin vähän tuloksia. Mikäli kysymyksessä on jokin vetomitta, on lapsen opittava, että koko mitattava suure on käytettävä ja mitta on täytettävä. Tutkimusten mukaan monet kuusivuotiaat lapset tuntevat kylläkin ensimmäisen vaatimuksen mutta eivät toista. Lapset eivät osaa täyttää mittaa täydellisesti, kun mittaavat vetomittoihin liittyviä suureita (esim. Carpenter 1971, 1975, Galperin & Georgiev 1969).

Toisaalta, jos on annettu valmiiksi mittojen joukko, joiden avulla voidaan peittää tietty pituus, kuusivuotiaat lapset näyttävät onnistuvan tässä. Tarkemmin sanottuna he osaavat peittää koko pituuden ja vieläpä siten, että tyhjiä kohtia ei jää jäljelle (esim. Carpenter 1971, Hiebert 1979). Kuitenkin, jos tällaiset lapset saavat käyttöönsä vain yhden mittakepin, jonka avulla jonkin pidemmän kepin pituus on selvitettävä, syntyy vaikeuksia. He saattavat "merkitä" kertaavassa paikanvaihdossysteemissä mitan loppukohdan koko sormen leveydellä. Tämä saattaa olla joillekin lapsille käsitteellinen virhe. He saattavat ajatella, että riittää, kun mitattavan objektin päät tulee peitettyä. Toisaalta tässä saattaa olla kysymys vain rajoitetuista toiminnallisista kyvyistä (vrt. Fuson & Hall 1982, Hiebert 1979).

Ekvivalenssien muodostukseen liittyen tarkastellaan seuraavaa Piaget'n koetta, jota tullaan käyttämään tämän työn kokeellisessa osassa kiintopisteenä Piaget'n tutkimuksiin (Copeland 1970, Piaget et al 1960). Kuviossa on "autorata", jossa lapsen "auto" liikkuu suunnassa $\overrightarrow{A_1C_1}$ ja testaajan "auto" suunnassa $\overrightarrow{C_2A_2}$. Testaaja siirtää "autoaan" kohtaan B_2. Lapsen on siirrettävä omaa "autoaan" täsmälleen yhtäpitkän matkan eli $|\overrightarrow{A_1B_1}|$.



Kuvio VII 1. "Autoratatehtävä" (vrt. Piaget et al 1960, 128-149)

Piaget'n mukaan kyseisen mittaustehtävän suoritukset voidaan jakaa kolmeen suoritusluokkaan. Ensimmäisellä "tasolla" lapsi käyttää suoraa visuaalista arviota asettaen oman autonsa samalle tasolle testaajan auton kanssa. Toisin sanoen vain loppupiste määrää ratkaisun. Tällainen "yksidimensionaalinen" ajattelu on tyypillistä tämän tason lapselle. Toisella tasolla mittakeppi on edelleen vain sekundääri tapa ratkaista ongelma. Lapsi käyttää mittaa tarkistamaan visuaalisen tai omilla jäsenillään tekemänsä arvion. Tällaisen lapsen suoritusta kutsutaan intuitiiviseksi. Kolmannen asteen lapsi on kehittänyt älyllisen ja yleistetyn systeemin ratkaista tämäntyyppiset mittausongelmat. Tällä asteella voidaan Piaget'n mukaan erottaa välittävä vaihe. Välittävässä

vaiheessa lapsi osaa käyttää mittakeppiä, jos se on pidempi kuin mitattava matka. Operationaalisen asteen kehittyneemmässä vaiheessa lapsi kykenee ajattelemaan mittakepin yksikkönä ja osaa liikuttaa siten, että voidaan päätellä osittamisen ja paikan vaihdon synteesin toteutuneen. Tämä tapahtuu keskimäärin 8 - 10 vuoden iässä.

Edellä olevat tarkastelut koskevat siis lähinnä esimittauksellisten toimintojen kehitystä. On luonnollisesti erehdys, jos tarkastellaan yksinomaan esinumeerisia toimintoja. Toisin sanoen on tarkasteltava miten lapsi löytää yhteyden esinumeeristen ja numeeristen toimintojensa välillä. Tällöin meidän on kohdistettava huomio mittayksikköön ja tämän yksikön kertautuvaan toimintaan mittalukuyhteydessä.

3. Mittaluvun kehitys

On luonnollista, että mittaluvun kehitys on sidottu tiukasti mittayksikön idean ymmärtämisen kehitykseen. On varsin selkeitä tuloksia, että jo kuusivuotiaat lapset ymmärtävät mittaluvun ja sitä vastaavan mittayksikön välisen käänteisen suhteen. Kuitenkaan nämä lapset eivät vielä tajua, että alunperin samoiksi todetut määrät pysyvät samoina, vaikka ne mitataankin eri mittayksiköillä tuottaen eri mittaluvut. Esimerkiksi Carpenterin tutkimuksissa joissakin tehtävissä oli "oikeat" visuaaliset vihjeet ja "väärät" mittalukuvihjeet. Toisissa tehtävissä oli käänteinen tilanne. Lapset mittasivat kaksi vertailtavaa suuretta samalla yksiköllä. Tuloksena oli "oikeat" mittalukuvihjeet. Kuitenkin jokin visuaalinen harhautus riitti tuottamaan väärän vastauksen. Suurin osa 6 - 8 -vuotiaista lapsista keskittyi esiinpistäviin harhaanjohtaviindimensioihin eivätkä kyenneet koordinoimaan oikeita vihjeitä (Carpenter 1975, Carpenter & Lewis 1976, Hiebert 1979). Tämä tulos viittaa siihen, että lapset tarkastelevat jokaista yksikköä diskreettinä suureena sen aseman mukaan. Tämä "pisteominaisuus" on ikäänkuin tärkeämpi kuin yksikön "peittoominaisuus". Toisin sanoen lapset saattavat tarkastella mittalukuja vain kardinaalilukuina ikäänkuin kieltäen yksikön koon vaikutuksen lukuun kuvatussa yhteydessä. Tähän samaan viittaavat

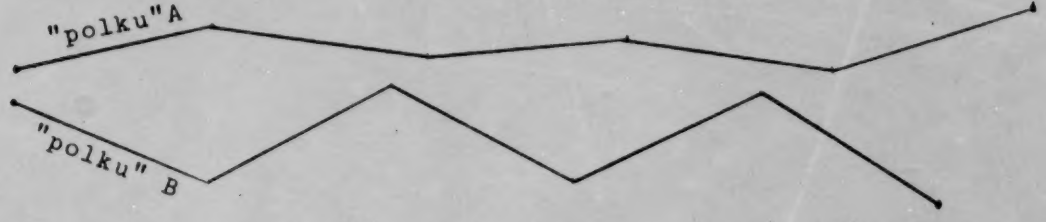
myös monet muut kokeet ja koulukäytäntö. Esimerkiksi mittauksen ideaan läheisesti liittyvää lukusuoraa tai viivainta käytetään "pistemäisesti". Amerikkalaisia yhdeksän- ja kolmetoistavuotiaita lapsia pyydettiin kertomaan, kuinka monta pituusyksikköä on pisteestä "1" pisteeseen "5". Suuri osa yhdeksänvuotiaista eli 77 % vastasi tehtävään väärin: 5 yksikköä. Kolmetoistavuotiaista erehtyi vielä kolmannes eli noin 33 % (Carpenter, Corbitt et al 1981). Myös venäläiset tutkimukset viittaavat samaan suuntaan. Galperin ja Georgiev korostavat, että kardinaalinen korostus aiheuttaa orientaation, joka johtaa luvun väärinymmärrykseen. He suorittivat sarjan mittaustehtäviä, jotka viittasivat samaan kuin edellä. Toisin sanoen lapsilta puuttuu perusymmärrys mittayksiköistä. Mainitut psykologit kehittivät ohjelman, jossa keskityttiin mittauskäsitteisiin. Samoin tehtiin selvä ero mittaukseen liittyvien tehtävien ja kardinaaliyhteyteen liittyvien tehtävien välillä. Ohjelman ensimmäisessä vaiheessa pyritään korvaamaan suora visuaalinen vertailu systemaattisella mittayksiköiden soveltamisella. Lapset joutuvat etsimään sopivan mittayksikön kullekin suureelle. Samoin vaihdellaan yksikön kokoa. Kaikki nämä toiminnot suoritetaan esinumeerisella tasolla siis ilman lukuja. Toisessa vaiheessa tuodaan luvut; siis sen jälkeen kun perustavat mittaustaidot ja spatiaaliset käsitteet on hankittu. Kolmannessa vaiheessa painotetaan suhdetta yksikön koon ja vastaavan mittaluvun välillä (Galperin & Georgiev 1969). Galperin ja Georgievin opetusmenetelmä on pitkälti analoginen 1970-luvulla käytetyn kardinaalisen lähestymistavan kanssa, jossa ei aluksi käytetty lukusanoja ollenkaan. Kaikki "perustava" toiminta tapahtui esinumeerisella tasolla. Kardinaalilähestymisessä on kuitenkin oleellinen ero mittaukselliseen lähestymiseen. Sillä ei näytä olevan eikä tarvitse olla kovinkaan paljon tekemistä lukukäsitteen kehittämisen ja lasten spontaanien prosessien ja strategioiden kanssa kuudesta kahdeksaan vuoden iässä (Brainerd 1979, Keranto 1979, 1981). Vaikka Galperinin ja Georgievin menetelmä vaikuttaa mielenkiintoiselta ja kokeilemisen arvoiselta, on siihen suhtauduttava varovasti. Osoittavathan lasten spontaanin kehityksen tutkimustulokset, että jatkuvien suureiden käsittelyyn liittyy melkoisia ongelmia. Tämän ohella menetelmän tuloksista on kovin vaikea päätellä, koska kokeelliset mittaukset ja opetusmenetelmät on esitetty vain lyhyesti.

Toisaalta menetelmä saattaisi helpottaa kymmenjärjestelmämme ymmärtämistä. Tunnetustihan kymmenjärjestelmämme on mittasysteemi, jossa jälkimmäisen yksikön suhde edelliseen on vakio eli kymmenen. Tämäkin vaatisi tutkimuksia, joita tässä työssä ei ollut mahdollista tarkemmin suorittaa.

4. Kognitiivisten kykyjen merkitys pituuden mittauskyvyn kehitykselle

Loogisesta näkökulmasta Piaget-kyvyistä pituuden säilyvyyksillä ja relaationaalisilla päätelmillä on ehdollinen yhteys mittauskyvyn kehitykselle. Millaisia ovat ne pituuden mittaamiseen liittyvät tehtävät, joissa olettaisi tarvittavan välttämättä transitiivi- ja korvaamispäätelmiä? Toisaalta millaisia ovat ne tehtävät, jotka saattavat ratketa ilman Piaget-kykyjen operationaalista astetta? Näitä kysymyksiä on tutkittu kokeellisesta näkökulmasta suhteellisen vähän. Tämän työn näkökulmasta ovat tärkeimmät Baileyn, Hiebertin, Inhelderin sekä Steffen tutkimukset (Bailey 1974, Hiebert 1981, Inhelder 1972, Steffe 1971).

Oletetaan, että lasta pyydetään vertailemaan kahta janasegmenteistä muodostuvaa "polkua" keskenään (kuvio 2).



Kuvio VII 2. "Polkujen" A ja B pituuksien vertailutehtävä (vrt. Steffe 1971)

Oikean suoritusprosessin näkökulmasta lapsen on kyettävä koordinoimaan segmenttien keskinäisten ja välisten kvantitatiivisten vertailujen osaskeemat segmenttien lukumäärien vertailun skeemaan. Segmenttien kvantitatiiviseen vertailuun sisältyy nyt mittayksikön käyttö ja tätä kautta transitiivi- ja substituutiopäätelmät. Baileyn mukaan transitiivipäättely osoittautui myös kokeellisesti välttämättömäksi ehdoksi ratkoa kyseisiä "polkutehtäviä". Bailey löysi myös pituuden ekvivalenssin säilyvyyden

edeltävän "polkutehtävien" suoritusta. Toisaalta, kuten Hiebert aivan oikein huomauttaa, ei riitä, että esimerkiksi transitiivipäättely ja säilyvyys edeltää "polkutehtävien" suoritusta. Tarvitsee todella osoittaa esimerkiksi opetustutkimuksella, että transitiivipäättely ja säilyvyys ovat välttämättömiä edellytyksiä "polkutehtävien" suoritukselle. Itse asiassa Hiebert pyrki tutkimaan vaikuttaako kognitiivisten kykyjen puute pituusmittauksien oppimiseen. Lopulliseen tutkimukseen osallistui 32 lasta, jotka jakautuivat neljään luokkaan loogisen päättelykyvyn (transitiivipäätelmät ja säilyvyys) ja informaation kapasiteetin (mitattu BDS-testillä) suhteen. Mikäli lapsi säilytti pituuden ja osasi päätellä transitiivisesti, luettiin hänet korkean loogisen päättelykyvyn luokkaan. Jos lapsi ei osannut kumpaakaan, kuului hän matalan päättelykyvyn luokkaan. Informaation käsittelykapasiteetti oli korkea, jos span oli suurempi kuin kaksi ja matala muussa tapauksessa. Jokaiseen neljästä luokasta tuli 8 kuudesta seitsemään vuotiasta lasta. Suoritettavat tehtävät jaettiin kolmeen luokkaan sen mukaan, mitä kognitiivisia kykyjä ne loogisen analyysin perusteella vaativat. Ensinnäkin oli tehtäviä, jotka vaativat vain tiettyä mittaustekniikkaa (5 tehtävää). Esimerkiksi oli osattava merkitä paperille objektin alku- ja loppupiste tai määrätä kuinka monta valmiiksi annettua pikkupalikkaa (Cuisenaire-palikat) sisältyi isompaan palikkaan. Toisaalta oli tehtäviä (8 tehtävää), jotka loogisesti vaativat säilyvyyden tai transitiivisuuden omaamista. Esimerkiksi lapset joutuivat vertailemaan kahden kuvaobjektin pituuksia käyttäen apuna kynää ja paperia. Kun nämä opetustehtävät oli esitetty ja ratkaistu, annettiin tehtävä, jossa lapsi joutui integroimaan opetusongelmissa esitetyt taidot ja käsitteet. Esimerkiksi esitettyihin tehtäviin liittyen lapsi joutui konstruoimaan itse objektin, joka on yhtäpitkä kuin malliobjekti. Tehtävässä sai käyttää kynää ja paperia apuna. Tällaisia informaation käsittelykapasiteetin ja mittauskyvyn yhteyksiä kartoittavia osioita oli työssä 4 kappaletta. Tulokset olivat mielenkiintoisia ja osittain hypoteesien mukaisia.

Mittaustekniikkaan liittyvissä tehtävissä loogisen kyvyn mukaan jaetut ryhmät eivät eronneet merkittävästi toisistaan. Loogista päättelykykyä oletettavasti vaativissa tehtävissä suorituserot

olivat merkitseviä. Kun looginen päättelykyky oli vakioitu mainituissa tyypeissä, todettiin, että IPC-kyvyillä ei ollut vaikutusta kummankaan tyypin suorituksiin. Samoin todettiin, että loogisen päättelykyvyn ja IPC-kyvyn yhteisvaikutus mittauskykyihin kummassakaan tyypissä ei ollut merkitsevä.

Mittaustehtävien toinen jaottelu perustui niihin paineisiin, joita kyseiset tehtävät oletettavasti aiheuttavat informaation käsittelykapasiteetille. Kuten ennakoitiin, niin "yksittäisiä" mittauskykyjä vaativissa opetustehtävissä (9 kappaletta) IPC-ryhmät eivät eronneet merkitsevästi toisistaan. Sama koskee IPC-kyvyn ja loogisen päättelykyvyn yhteisvaikutusta. Vastoin oletuksia myöskään mittauskykyjen "integrointitehtävissä" (4 kappaletta) ei syntynyt merkittäviä eroja. IPC-kyvyn ja loogisen päättelykyvyn yhteisvaikutus ei tässäkään ollut merkitsevä.

Teoreettisesta näkökulmasta Piaget-kykyjen ja IPC-kyvyn pitäisi olla toisistaan riippuvia (Pascual-Leone 1970, Case 1980a, b). Hiebert päättelee, että nimenomaan IPC-kyvyn suhteen havaitut tulokset kertovat, että BDS-testi ei ehkä ole pätevä mitta mittausyhteyksissä (vrt. luku IV). Toisaalta saattoi olla niin, että kaikkien tehtävien paineet olivat matalan IPC-kyvyn omaavien lasten kapasiteetin sisällä. Tarvitsee kehittää sisältöspesifejä mittoja IPC-kyvylle ja suhteuttaa nämä kyseisen sisällön tehtävien aiheuttamiin paineisiin. Tällöin vasta kyetään ennakoimaan lasten suorituksia IPC-kyvyn suhteen kyseisellä alueella. Tarvitaan lisää perustutkimusta ennen kuin tämä on saavutettu (Hiebert 1981).

Kannattaa mainita, että Hiebertin harjoittelututkimuksessa ei pyritty kehittämään lasten kognitiivisia kykyjä. Toisaalta on olemassa tutkimuksia, jotka viittaavat siihen, että lineaarisen mittauksen peruskäsitteitä voidaan edistää sopivalla harjoituksella. Esimerkiksi Inhelderin tutkimuksissa pyrittiin numeeristen operaatioiden avulla vaikuttamaan pituuden mittauskyvyn kehittymiseen. Lasten oli konstruoitava tulitikuista yhtäpitkiä suoria murtoviivoja kuin testaajan murtoviiva oli (Inhelder 1972, Inhelder & Sinclair 1969). Tehtävät olivat sikälikin vaikeita, että testaajan ja lapsen tikkujen pituuksien suhde oli 7:5.

Aluksi lapset keskittyivät yhteen dimensioon ja eivät kyenneet näkemään ristiriitaa suorituksissaan. Toisessa vaiheessa lapset oppivat näkemään ristiriidan, mutta eivät yritä ratkaista sitä. Kolmannessa vaiheessa lapset yrittävät ratkaista ristiriidan "kielletyillä" menetelmillä. Esimerkiksi katkoivat tikkuja tai konstruoivat polun, joka ei ollut suora. Seuraavassa vaiheessa pituuden ja mittalukujen skeemat kyettiin integroimaan. Lapset oppivat tunnistamaan, että tarvittiin enemmän tikkuja, koska ne olivat lyhyempiä kuin testaajan tikut. Kyseisten Inhelderin tutkimusten mukaan vaikuttaa siltä, että numeerisia operaatioita voidaan käyttää apuna mittaustoimintojen omaksumisessa. Tässä olisi yksi mielenkiintoinen tutkimuskohde, johon tässä työssä ei enää tarkemmin voida puuttua.

VII B MITTAUSKYKYJEN KOKEELLINEN NÄKÖKULMA

Mittauskykyjen kokeellisen osan pääongelmat ovat seuraavat:

A. Missä määrin kognitiivisten kykyjen kehittymättömyys heijastuu mittaussuorituksiin ja strategioihin?

B. Missä määrin kognitiiviset kyvyt selittävät mittaussuorituksia ja strategioita?

C. Missä määrin aritmeettiset kyvyt ja lukujonotaidot selittävät mittaussuorituksia ja strategioita?

Kysymyksiin haetaan vastauksia samaan tapaan kuin aiemmissa kokeellisissa osissa. Tilastollisina analysointimenetelminä käytetään siis kognitiivisten ryhmien suorituserojen t-testejä, prosenttilukuja sekä korrelaatio- ja regressioanalyysejä.

1. Mittauskykyjen mittari sekä pisteytykset

On syytä heti aluksi todeta, että tämän tutkimuksen mittauskykyjä tarkasteleva osa on lähinnä tunnusteleva. Mittauskyvyn osioiden valinnassa on pyritty lähinnä muodostamaan yhteyksiä amerikkalaisiin tutkimuksiin (Bailey 1974, Carpenter 1971, Hiebert 1979, Steffe 1971) sekä Piaget'n mittausoperaatioita koskeviin ajatuksiin (Piaget et al 1960). Koulukäytäntöön tällä tutkimuksen osalla ei ole vielä kovinkaan suoria yhteyksiä lukuunottamatta paria standardimittayksikön käyttöön liittyvää osiota. Kaikki osiot liittyvät lähinnä pituuden mittauskyvyn tutkimiseen. Tietysti voidaan keskustella esimerkiksi "pituuden peittämistehtävien" COV1-4 (cover) sisältövaliditeetista. Toisin sanoen voitaisiin aiheellisesti spekuloida siitä, mittaavatko nämä tehtävät pituuden vai pinta-alan vai ehkä molempien peitto-ominaisuuksia. Tässä työssä tämän kysymyksen kokeelliseen analyysiin ei ole mahdollisuuksia. Tehtävässä COV1 oli annettu valmiiksi riittävä määrä mittayksiköitä, joilla mitattava luiska voitiin peittää. Tarkoituksena oli lähinnä selvittää kykenevätkö lapset tarkan peiton tekoon tässä tapauksessa (vrt. Carpenter 1971). Tehtävät COV3-4 mittaavat lähinnä mittayksikön koon ja sitä vastaavan mittaluvun suhteen ymmärtämistä (Carpenter 1975). COV2-4 tehtävien tiedostamiseen ja prosessiin perustuva pisteytys on seuraava. 0-pistettä, jos ei onnistu; 1-piste, jos oikea tulos ja ei pätevää selitystä. Epäpäteviä tai intuitiivisia selityksiä olivat

esimerkiksi "kun ne on niin pieniä" tai "kun nämä on näin suuria". 2-pistettä, jos oikea suoritus ja pätevä selitys, esim. "nämä ovat yhtäpitkiä kuin nämä" tai "nämä ovat pidempiä kuin nämä joten näitä tarvitaan vähemmän". Suoritusten oikeellisuuspisteytys on kuten aiemmissa luvuissa 1 tai 0. COV-muuttujista muodostettiin kaksi summamuuttujaa $COV = \sum_{i=1}^{4} COV_i$ sekä tiedostamiseen liittyvä $TCOV = \sum_{k=2}^{4} TCOV_k$. Kiinnekohdaksi Piaget'n tutkimuksiin valittiin "autoratatehtävä" (kuvio VII 1). Varsin tyypillistä Piaget'n kokeille on, että ne saattavat mitata useampaa kuin yhtä asiaa (vrt. Keranto 1981). Niin on ilmeisesti myös "autoratatehtävien" osalta, joita tässä työssä on kolme kappaletta MOT1-3 (motion). Näissä tehtävissä on kyettävä koordinoimaan suunnan ja mittauksen skeemat. Toisin sanoen voisi olettaa, että ne lapset, joiden IPC = 0 eivät selviä näistä. Saattaa olla, että myös säilyvyys- ja transitiivipäätelmien taso vaikuttaa näihin toimintoihin. Tämä on lähinnä tässä työssä kiinnostuksen kohteena. Tehtävien MOT1-3 prosessiin perustuva pisteytys on seuraava: 0-pistettä, mikäli periaatteessa väärä suoritusprosessi.

Tällaisia vääriksi luokiteltuja suoritusprosesseja olivat a) visuaalinen arvio, jossa autot samalle tasolle b) mittaustoiminto oikein, mutta "saman tason" ratkaisu; 1-piste, kun periaatteessa oikea suoritusprosessi, a) visuaalisesti arvioiden oikea asema, b) oikea mittausyritys, mutta mitan käytössä puutteellisuuksia ja epätarkkuuksia; 2-pistettä, kun täysin oikea ja tarkka suoritusprosessi a) jäljellä oleva matka mitattu, b) tehty matka mitattu. MOT-muuttujista muodostettiin kaksi summamuuttujaa $MOT = \sum_{i=1}^{3} MOT_i$ ja $SMOT_i = \sum_{i=1}^{3} SMOT_i$.

Toisen vaativan tehtävätyypin muodostavat "polkutehtävät" TRAV 1-3 (travel) (ks. kuvio VII 2 sekä liite VII 1.). Näissäkin tehtävissä tarvitaan vähintäin kahden erityyppisen skeeman yhdistelyä. Täten on oletettavaa, että kognitiivisilla IPC-kyvyillä on yhteyksiä näiden tehtävien suorituksiin. On myös loogisesta näkökulmasta katsoen ilmeistä, että Piaget-kyvyillä on yhteyksiä näiden tehtävien suorituksiin. Siitä ei ole selvää tietoa miten laskutaidot ja lukujonotaidot liittyvät näiden tehtävien suorituksiin. TRAV-tehtävien prosessiin perustuva pisteytys on seuraava: 0-pistettä, kun suoritus perustuu pohjimmiltaan "polkujen" päätepisteiden keskinäiseen asemaan eli loppupisteet

määräävät ratkaisun (vrt. Piaget'n "autoratatehtävä", I taso). Tällaisia väärään suoritukseen johtavia prosesseja havaittiin useita: a) suora visuaalinen arvio päätepisteiden asemasta, b) loivuus-jyrkkyys vertailua, mutta päädyt dominoivat ratkaisua, c) tekee mittauksia, mutta ei laske osien lukumääriä, d) laskee lukumäärät, mutta päädyt dominoivat, e) laskee lukumäärät ja vertailee osat mutta ei kykene vielä koordinoimaan skeemoja, päädyt dominoivat; 1-piste, kun tulos oikein, mutta suoritus perustuu a) visuaalisesti oikeaan arvioon ilman selkeää mittaamista tai laskemista, b) laskee lukumäärät, mutta ei suorita päteviä mittausvertailuja; 2-pistettä, kun ottaa eksplisiittisesti huomioon sekä osien lukumäärät että keskinäiset ja väliset pituussuhteet.

TRAV-tehtävistä muodostettiin kaksi summamuuttujaa $TRAV = \sum_{i=1}^{3} TRAV_i$ sekä prosessiluokitteluun perustuva $STRAV = \sum_{i=1}^{3} STRAV_i$.

Lähinnä mittaustekniikkaan liittyviä tehtäviä on tässä työssä kaksi kappaletta. L-tyypin tehtävässä on lapsen mitattava viivaimen avulla kuinka monta senttimetriä rautalangan pätkä on (ks. liite VII 1). EL-tyypin tehtävissä oli etsittävä yhtäpitkä rautalanka (5 pkl) kuin koehenkilöllä oli kädessään. Näiden tehtävien pisteytyksessä tyydyttiin yksinomaan suorituksen oikeellisuuteen. Toisin sanoen, jos koehenkilö osasi tehtävän sai hän 1 pisteen muutoin tuli 0 pistettä. Tavallisin virhelähde tehtävän L suorituksessa oli väärän lähtöpisteen valinta. Tehtävistä L ja EL muodostettiin summamuuttuja MT (mittaustekniikka).

2. Mittauskykyjen suoritusprosentit ja luotettavuus

Alla olevassa taulukossa on esitetty mittauskykyjä mittaavien osioiden suoritusprosentit oikeellisuuden näkökulmasta.

Taulukko VII 1. Spesifien mittauskykyjen suoritusprosentit (N=35)

COV1	COV2	COV3	COV4	EL	L	MOT1	MOT2	MOT3	TRAV1	TRAV2	TRAV3
100	100	94	97	97	51	40	49	46	20	23	17

Prosenttitaulukon perusteella voidaan todeta, että koulutulokkaat kykenevät tarkan peiton tekoon (COV1) sekä ymmärtävät yleisesti

ottaen mittayksikön ja mittaluvun välisen käänteisen suhteen (COV3-4). Nämä tulokset ovat yhdenmukaisia amerikkalaisten töiden kanssa (Carpenter 1971, 1975). Myös ekvivalentin pituuden löytäminen ei tuota yleisesti ottaen vaikeuksia. Toisaalta, jos pyydettäisiin lasta ottamaan jostakin rautalankojen joukosta täsmälleen 20 cm pituinen lanka syntyisi jo eroja. Tämä näkyy siitä, että vain noin puolet lapsista kykeni standardimittayksikön käyttöön (L). Eniten virheitä tapahtui (82 %) 0-kohdan valinnassa. Lopuissa tapauksissa ei osattu tehdä mitään. Oikeiksi suorituksiksi luokitelluissa tapauksissa osattiin viivaimen nollakohta asettaa mitattavan objektin alkuun. Tämän jälkeen suoritus eteni yleensä ottaen laskemalla joko "pistemäisesti" tai laskemalla välien lukumäärä. Tässä työssä ei eroteltu edellä olevia suorituksia, vaikka se olisi ollut laadullisen suorituksen näkökulmasta järkevää.

"Autoratatehtävät" MOT1-3 ovat suurin piirtein samaa vaikeusastetta keskenään. Sillä, onko mittakeppi lyhyempi vai pidempi kuin mitattava, ei tässä työssä näytä olevan suuremmin merkitystä. Oleellisemmaksi saattaa muodostua se, mikä on "ajetun" matkan suhde koko "ajoradan" pituuteen. Tämä tulee paremmin esille taulukon VII 2 jälkeisessä pohdiskelussa.

Kaikkein vaikeimmiksi osioiksi osoittautuvat odotetusti "polkutehtävät", joissa oli koordinoitava toisiinsa esinumeeriset ja numeeriset toiminnot. Näissäkin suoritusstrategiat olivat yhdenmukaisia, mikä näkyy seuraavasta taulukosta.

Taulukko VII 2. Tiedostamiseen (COV2-4) ja prosessiin (MOT1-3 ja TRAV1-3) perustuvien mittauskykyluokkien suoritusprosentit (N=35)

	COV2	COV3	COV4	MOT1	MOT2	MOT3	TRAV1	TRAV2	TRAV3
0-taso	0	6	3	60	51	54	80	76	83
1-taso	46	6	28	11	23	20	6	12	12
2-taso	54	88	69	29	26	26	14	12	5

Tehtävätyyppien MOT ja TRAV 0-suorituksia kannattaa tarkastella vielä yksityiskohtaisemmin. "Autoratatehtävien" yleisin virheellinen suoritusstrategia oli siirtää silmämäärin autot samalle tasalle. Suoritusprosentit olivat 29 %, 31 % ja 26 %. Toiseksi

yleisin virheellinen strategia oli käyttää mittaa saman tason määritykseen asettamalla mitta kohtisuoraan kulkusuuntia vastaan. Suoritusprosentit olivat 23 %, 20 % ja 25 %. TRAV1 tehtävässä oli kolme lasta, jotka käyttivät mittaa oikein, mutta suunnat hämäsivät. Seuraavissa kahdessa tehtävässä MOT2-3 kaksi näistä lapsista suoriutui aivan oikein. Tämä "herätys" johtui ilmeisesti siitä, että tehtävässä MOT2 "ajettu matka" oli vähäinen (10 cm) koko välimatkaan (34 cm) verrattuna.

Myös TRAV-tehtävien 0-suorituksissa havaittiin yhdenmukaisuutta. Suoraan visuaaliseen päätyerojen arvioon perustuvat suoritusprosentit ovat 29 %, 31 % ja 20 %. TRAV-tehtävien täydelliseen suoritukseen kykeni vain kaksi lasta.

Luotettavuuden tutkimiseksi määrättiin myös taulukkoon VII 2 liittyvien muuttujien korrelaatiot sekä laskettiin näistä parhaimmat reliabiliteettiarvot. Nämä on esitetty seuraavassa taulukossa.

Taulukko VII 3. Spesifien tiedostamiseen (COV) ja prosessiin (MOT ja TRAV) perustuvien mittauskykytyyppien sisäiset korrelaatiot (N=35). Korrelaatiot on ilmoitettu järjestyksessä (X1,X2), (X2,X3), (X2,X3). Reliabiliteettiarvot on laskettu korkeimman korrelaation mukaan

muuttujat	korrelaatiot	reliabiliteettiarvot
COV2,3 ja 4	37^{*}, 27, 53^{***}	69
MOT1,2 ja 3	77^{***}, 72^{***}, 94^{**}	97
TRAV1,2 ja 3	82^{***}, 54^{***}, 49^{**}	90

$^{***}p < .001$ $^{**}p < .01$ $^{*}p < .05$

Kuten taulukon VII 2 perusteella voitiin jo alustavasti päätellä nousevat korrelaatiot yleisesti ottaen erittäin merkitsevälle tasolle. Poikkeuksen muodostaa COV2 tehtävä, jonka korrelaatiot COV3 ja 4 tehtäviin jäävät odotetusti suhteellisen mataliksi. Loogisesta näkökulmasta COV3 ja COV 4 tehtävien piti mitata samaa asiaa vähän eri näkökulmasta. Näin näkyy korrelaation 0.53^{***} perusteella olevankin. Kyseistä mittauskykyjen mittaria voitaneen pitää edellä olevien tulosten perusteella suhteellisen luotettavana.

3. Missä määrin kognitiivisten kykyjen kehittymättömyys heijastuu mittaussuorituksiin ja strategioihin?

Tarkastellaan aluksi, mitä kognitiivisten kykyjen puute (ryhmät, joilla CA=0) vaikuttaa suorituksiin ja strategioihin. Seuraavassa taulukossa on esitetty lähinnä ne keskiarvot, joissa on havaittu tilastollisesti merkitseviä eroja ryhmien CA=0 ja CA>0 välillä. Toisaalta, koska meitä kiinnostaa mitä kognitiivisten kykyjen puute vaikuttaa erityisesti MOT- ja TRAV-tyyppien suorituksiin ja strategioihin, on näiden keskiarvot esitetty kokonaisuudessaan.

Taulukko VII 4. Ryhmien CA=0 ja CA>0 suoritusten ja strategioiden keskiarvot ja merkitsevyyserot mittauskykymuuttujilla (N=35)

	MT	COV	TCOV	MOT	SMOT	TRAV	STRAV
TEJEC =0(7)		3.57	3.86	0.86	0.86	0.14	0.14
TEJEC >0(28)		4.00*	5.32**	1.46**	2.46	0.71	1.11
TLC =0(12)			4.42	1.08	1.25	0.83	0.83
TLC >0(23)			5.35*	1.48	2.61	0.87	1.35*
ESP(O)=0(9)				1.78	2.44	0.33	0.67
ESP(O)>0(26)				1.19	2.04	0.69	1.00
ESP(S)=0(7)				1.57	1.71	0.00	0.00
ESP(S)>0(28)				1.19	2.04	0.69	1.00
CSP =0(14)				0.57	0.93	0.50	0.71
CSP >0(21)				1.86**	2.95*	0.67	1.05
MEASP =0(8)				0.75	1.13	0.25	0.25
MEASP >0(27)				1.52	2.44	0.70	1.11

** $p < .01$ * $p < .05$

Piaget-kykyjen erotteluvoima kohdistuu lähinnä COV ja TCOV muuttujiin, joista COV3 ja 4 tehtäviin liittyi käänteisen ajattelun idea. Tulos on tässä mielessä looginen. Myös tehtävätyypeissä MOT ja TRAV havaitaan kognitiivisten ryhmien välillä suoritus-eroja siten, että ryhmien CA=0 suoritukset ovat heikompia. Tehtävien vaikeustason ja osin pienen otoksenkin takia erot eivät rouse kuin MOT tehtävätyypin kohdalla merkitseviksi. Mielenkiintoinen on IPC-kykyjen merkitys MOT ja TRAV tyyppien hankinnalle. MOT-tyypin kohdalla parhaaksi erottelijaksi osoittautuu CSP-kyky.

Toisaalta olisi odottanut, että IPC=0 ryhmien suoritukset MOT ja SMOT muuttujilla olisivat lähellä nollaa. Näin käy kuitenkin lähinnä vain CSP ja MEASP kykyjen tapauksessa. Miten tämä on selitettävissä? Näkemykseni mukaan selitystä kannattaa hakea IPC-kykyjen spesifistä luonteesta. Ovathan ESP, ESP(O) sekä ESP(S) kyvyt osoittautuneet aiemmissa tarkasteluissa varsin luotettaviksi ja loogisesti "käyttäytyviksi". Toisaalta "autoratatentävät" ovat lähinnä mittaukselliseen sisältöön kuuluvia, kun taas TRAV tehtävien tapauksessa lapsi joutuu käyttämään sekä pituuksien ulkoiseen vertailuun että numeeriseen yhteyteen liittyviä skeemoja. Tästä näkyy olevan seurauksena myös ESP(O) ja ESP(S) kykyjen hyvinkin looginen "käyttäytyminen". Erityisesti ESP(S)=0 ryhmän suoritukset TRAV ja STRAV muuttujan kohdalla osoittavat nollaa. Tämä on täysin teorian mukaista ja vahvistaa nähdäkseni aiemmin sanottua. Myöskin MEASP ja ESP(O)=0 ryhmien suoritukset TRAV-tyypin suorituksissa ovat lähellä nollaa kuten teorian mukaan pitäisi ollakin. Taulukosta VII 4. havaitaan, että IPC-kyvyt eivät erottele COV ja TCOV muuttujien tapauksessa. Samoin havaitaan odotetusti, että mittaustekninen kyky MT ei riipu suuremmin kognitiivisten kykyjen kehitysasteesta (vrt. Hiebert 1981).

Toiseksi tarkastellaan lyhyesti missä määrin kognitiivisten prosessien tiedostaminen heijastuu mittauskykyihin. Tästä ei esitetä taulukkoa, koska tilanne on varsin lyhyesti kuvattavissa seuraavasti. Ainoat merkittävät erot "tiedostajien" ja "sitoutuneiden" (TTR; TSUBS,TIN; TNC ja TEJEC/taulukko V 5.) välillä havaitaan muuttujilla COV ja TCOV. Ryhmien TIN < 5 ja TIN > 4 ero on merkitsevyystasoltaan korkein: 3.75; 5.41*** /TCOV, sekä ryhmien TTR < 7 ja TTR > 6 tapauksessa matalin: 4.56; 5.42* /TCOV. Poikkeuksena havaittiin myös ryhmien TNC < 3 ja TNC > 2 suorituksissa muuttujalla SMOT melkein merkitsevä ero: 1.13; 2.90* .

Yhteenvetona voidaan todeta, että kognitiivisten kykyjen kehittymättömyys tulee näkyviin Piaget-muuttujien tapauksessa lähinnä COV ja TCOV muuttujien tapauksessa. Piaget-kykyjen puute näkyy kylläkin MOT ja TRAV tyypeissä, mutta tehtävien vaikeuden ja otoksen pienuuden takia erot eivät yleisesti ottaen muodostu merkitseviksi. IPC-kykyjen puute näkyy myöskin MOT ja TRAV tyypin suorituksissa, mutta tilastollisia eroja ei pääse syntymään edellä esitetyn perusteella. Erityisesti havaittiin, että IPC-kyvyn

ESP(S) puute näkyy siinä, että tällaiset henkilöt epäonnistuvat 100 %:sti TRAV-tyypin tehtävissä. Näin oli teoriapohdiskelussa ennakoitukin.

4. Missä määrin kognitiiviset kyvyt selittävät mittaussuorituksia ja strategioita?

Regressioanalyysejä varten laadittiin kognitiivisten kykyjen ja mittauskykyjen korrelaatiomatriisi, joka on liitteenä (liite VII 2). Korrelaatioista havaitaan itse asiassa samansuuntaiset tulokset kuin t-testien avulla. Lisäyksenä t-testeihin perustuviin analyyseihin on IPC-kykyjen maksimisuoritusmuuttujat. Näistä selitysvoimaisimmiksi tulevat osoittautumaan $ESP_m(S)$ sekä $MEASP_m$ muuttujat. Tämän ohella korrelaatiomatriisista nähdään paremmin TLC muuttujan yhteydet TRAV ja STRAV muuttujiin. Korrelaatiot ovat merkitsevää tasoa 45^{**} ja 44^{**}. Siis pituuden säilyvyyksillä on yhteyksiä "polkutehtävien" suorituksiin. Toisaalta transitiivi- ja substituutiopäätelmillä ei näyttäisi olevan yhteyksiä TRAV ja MOT tyypeissä onnistumiseen tai epäonnistumiseen. Sama koskee TIN ja TEJEC muuttujia, jotka informaation prosessoinnin ja matemaattisen sisällön osalta ovatkin lähempänä diskreettien joukkojen kvantitatiivisia vertailuja. Seuraavasta taulukosta näkyy kognitiivisten kykyjen selitysvoima mittauskykyihin nähden.

Taulukko VII 5. Mittauskykyjen regressiomalli (N=35). Selittäjinä Piaget- ja IPC-kyvyt erikseen ja yhdessä.

Selitettävä	= Selittäjät; Piaget-kyvyt	R^2 (%)
MT	= ei merkitseviä selittäjiä	-
COV	= 0.42 TEJEC - 0.62 SSER + 0.61 TIN	46
TCOV	= 0.45 TNC + 0.35 TTR	41
MOT	= ei merkitseviä selittäjiä	-
TRAV	= 0.45 TLC	20
SMOT	= 0.41 TNC	17
STRAV	= 0.44 TLC	19
Selitettävä	= Selittäjät; IPC-kyvyt	
MT	= 0.34 ESP_m(S)	12
COV	= 0.40 MEASP	16
TCOV	= 0.48 MEASP	23
MOT	= 0.42 CSP - 0.39 ESP(O) + 0.37 $MEASP_m$	40
TRAV	= 0.57 ESP(S)	32
SMOT	= 0.41 CSP	17
STRAV	= 0.47 ESP(S)	19
Selitettävä	= Selittäjät; Piaget- ja IPC-kyvyt	
MT	= 0.34 ESP_m(S)	12
COV	= 0.42 TEJEC - 0.61 SSER + 0.61 TIN	46
TCOV	= 0.49 TNC + 0.47 TTR - 0.34 ESP(O)	52
MOT	= 0.42 CSP - 0.39 ESP(O) + 0.37 $MEASP_m$	40
TRAV	= 0.56 ESP(S) + 0.45 TLC - 0.34 TTR	52
SMOT	= 0.38 CSP + 0.32 TNC + 0.40 $MEASP_m$ - 0.38CSP_m	44
STRAV	= 0.56 ESP(S) + 0.45 TLC - 0.34 TTR	52

($p < 0.05$)

Mittauskykyjen parhaiksi Piaget-selittäjiksi nousevat säilyvyyskyvyt TLC ja TNC. Piaget-kykyjen parhaiksi selitettäviksi osoittautuvat COV ja TCOV kuten jo korrelaatiomatriisista oli nähtävissä. Selitysasteet ovat 46 % ja 41 %. IPC-kyvyt eivät paljoa näitä selitysateita paranna. MOT, TRAV, SMOT ja STRAV muuttujien selitysasteet jäävät Piaget-kykyjen osalta alhaisiksi. Yhdessä Piaget- ja IPC-kyvyt kykenevät selittämään MOT, SMOT, TRAV, STRAV kykyjen vaihtelusta 40 % - 52 %.

5. Missä määrin aritmeettis-kardinaaliset kyvyt ja lukujonotaidot kykenevät selittämään mittaussuorituksia ja strategioita?

On oletettavaa, että koulutulokkaiden iässä aritmeettis-kardinaaliset sekä mittauskyvyt eivät ole kovin hyvin koordinoituneita keskenään. Toisaalta aritmeettis-kardinaalisten kykyjen COMP muuttujalla on rakenteellisia yhteyksiä mittaustilanteisiin. Sama koskee lukujonotaitojen BS muuttujaa. Tämän ohella tilanteeseen

vaikuttaa se, missä määrin kunkin tehtävätyypin ratkaisu edellyttää lukusanojen tai mittaluvun käyttöä. Ongelman ratkaisemiseksi laadittiin korrelaatiomatriisi, jossa on esitetty aritmeettis-kardinaalisten ja lukujonotaitojen korrelaatiot mittauskykyihin nähden (liite VII 3). Osoittautui, että lähinnä muuttujat BS ja COMP tulevat olemaan selitysvoimaisia. Kyseisen korrelaatiomatriisin perusteella on myös ennakoitavissa, että muuttujan TRAV selitysaste tulee kohoamaan korkeimmaksi. Tästä tarkemmin seuraavassa.

Taulukko VII 6. Mittauskykyjen regressiomalli (N=35). Selittäjinä aritmeettis-kardinaaliset kyvyt sekä lukujonotaidot erikseen ja yhdessä

Selitettävä	= Selittäjät; aritmeettis-kardinaaliset kyvyt	R^2 (%)
MT	= ei merkitseviä selittäjiä	-
COV	= 0.33 COMP	11
TCOV	= 0.47 COMP	22
MOT	= -0.41 EJE	17
TRAV	= 0.43 COMP	18
SMOT	= 0.42 COMP - 0.40 EJE	23
STRAV	= 0.37 COMP	14
Selitettävä	= Selittäjät; lukujonotaidot	
MT	= 0.56 BS - 0.74 BET + 0.43 DOBY	44
COV	= ei merkitseviä selittäjiä	-
TCOV	= 0.65 UPBY - 0.53 TO - 0.47 BEF + 0.42 BET	51
MOT	= 0.55 UPTO - 0.50 UP	16
TRAV	= 0.51 BS	26
SMOT	= 0.39 UPTO	15
STRAV	= 0.59 BS - 0.35 DO	28
Selitettävä	= Selittäjät; aritmeettis-kardinaaliset kyvyt ja lukujonotaidot	
MT	= 0.56 BS - 0.74 BET + 0.43 DOBY	44
COV	= 0.40 COMP - 0.53 DO + 0.32 BET	32
TCOV	= 0.52 COMP - 0.32 COUNT - 0.31 TO	39
MOT	= -0.41 EJE	17
TRAV	= 0.52 BS - 0.69 SABY+0.68COBM+0.43PRS-0.48RJOIM	60
SMOT	= 0.48 UPTO - 0.38 EJE	29
STRAV	= 0.58 BS - 0.45 DO + 0.31 EJE	36

($p < .05$)

Aritmeettis-kardinaalisten kykyjen selitysvoima tässä työssä tutkittuihin mittauskykyihin jää vähäiseksi. Parhaaksi selittäjäksi nousee odotetusti COMP muuttuja. Lukujonotaitojen selitysvoima MT ja TCOV muuttujiin nähden nousee yli 40 % tason. Myös muuttujiin TRAV ja STRAV nähden on lukujonotaidoilla jonkin verran selitysvoimaa. Aritmeettis-kardinaaliset kyvyt kykenevät yhdessä selittämään parhaimmillaan mittauskykyjä TRAV muuttujan tapauksessa (60 %). Tämä on hiukan korkeampi selitysaste kuin saatiin

kognitiivisten kykyjen avulla (52 %/taulukko VII 5). MT muuttujaa lukuunottamatta kognitiivisilla kyvyillä on hivenen enemmän selitysvoimaa mittauskykyihin nähden kuin aritmeettis-kardinaalisilla ja lukujonotaidoilla. Tähän palataan tutkittavan kognitiokentän makrotason tarkasteluissa seuraavassa luvussa.

VIII TUTKITTAVAN KOGNITIOKENTÄN RIIPPUVUUSSUHTEIDEN MALLIT SEKÄ KYTKENNÄT MATEMATIIKAN ALKUOPETUKSEEN JA OPPIMISVAIKEUKSIIN

Tämä luku tähtää viidennen päätehtävän ratkaisuun. Ensinnä esitetään tutkittujen matematiikan kasvatuksen osa-alueiden riippuvuussuhteiden mallit. Tämä tapahtuu niin, että kutakin tutkittua osa-aluetta varten muodostetaan makrotason muuttujat, joiden riippuvuussuhteita sitten tarkastellaan. Tämä tarkastelu kokoaa samalla aiemmin saatuja tuloksia.

Toisena tarkoituksena on yhdistää saavutetut tulokset matematiikan alkuopetukseen. Tämä tapahtuu niin, että esitetään lyhyesti tutkimustulosten kytkennät ja sovellutusmahdollisuudet koulukäytäntöön. Tähän tarkasteluun sisällytetään pohdiskeluja matematiikan oppimisvaikeuksien voittamisesta.

1. Tutkittavan kognitiokentän osa-alueiden "makromuuttujat" sekä niiden väliset korrelaatiot

Tutkittavien osa-alueiden riippuvuusmallien konstruoimista varten muodostettiin seuraavat "makromuuttujat":

TPI:= TTR+TSUBS+TIN+TNC+TEJEC+TLC+SSER (Piaget-kyvyt; tiedostaminen)

MU:= ESP+ESP(O)+ESP_m(O)+ESP(S)+ESP_m(S)+CSP+CSP_m+MEASP+$MEASP_m$ (IPC-kyvyt)

LU:= UP+TO+UPTO+UPBY+DO+DOTO+DOBY+AF+BEF+BET+SABY+BS+ENUM (lukujonotaidot)

SCO:= COUNT+SEJE+SPRS (kardinaaliset kyvyt)

LA := COBP+JOIP+SEPM+JOIM+RJOIM+COBM+COMP (aritmeettiset suoritukset)

SLA:= SCOBP+SJOIP+SSEPM+SJOIM+SRJOIM+SCOBM+SCOMP (aritmeettiset strategiat)

MI := MT+COV+MOT+TRAV (mittaussuoritukset)

SMI;= TCOV+SMOT+STRAV (mittausstrategiat)

Kyseisten summamuuttujien ohella tarkastellaan myös ikäjärjestyksen merkitystä kyseisten osa-alueiden riippuvuussuhteisiin. Tästä tutkittujen lasten ikäjärjestysmuuttujasta käytetään lyhennettä IJ. Seuraavassa on kyseisten muuttujien korrelaatiomatriisi.

Taulukko VIII 1. Tutkittavien osa-alueiden makromuuttujien korrelaatiot (N=35)

	TPI	MU	LU	SCO	LA	SLA	MI	SMI
IJ	33*	04	09	16	16	15	14	23
TPI		44**	71***	40*	69***	75***	30	52**
MU			60***	59***	71***	60***	41*	41*
LU				54***	86***	91***	26	38*
SCO					77***	67***	01	10
LA						91***	16	30
SLA							19	30
MI								88***

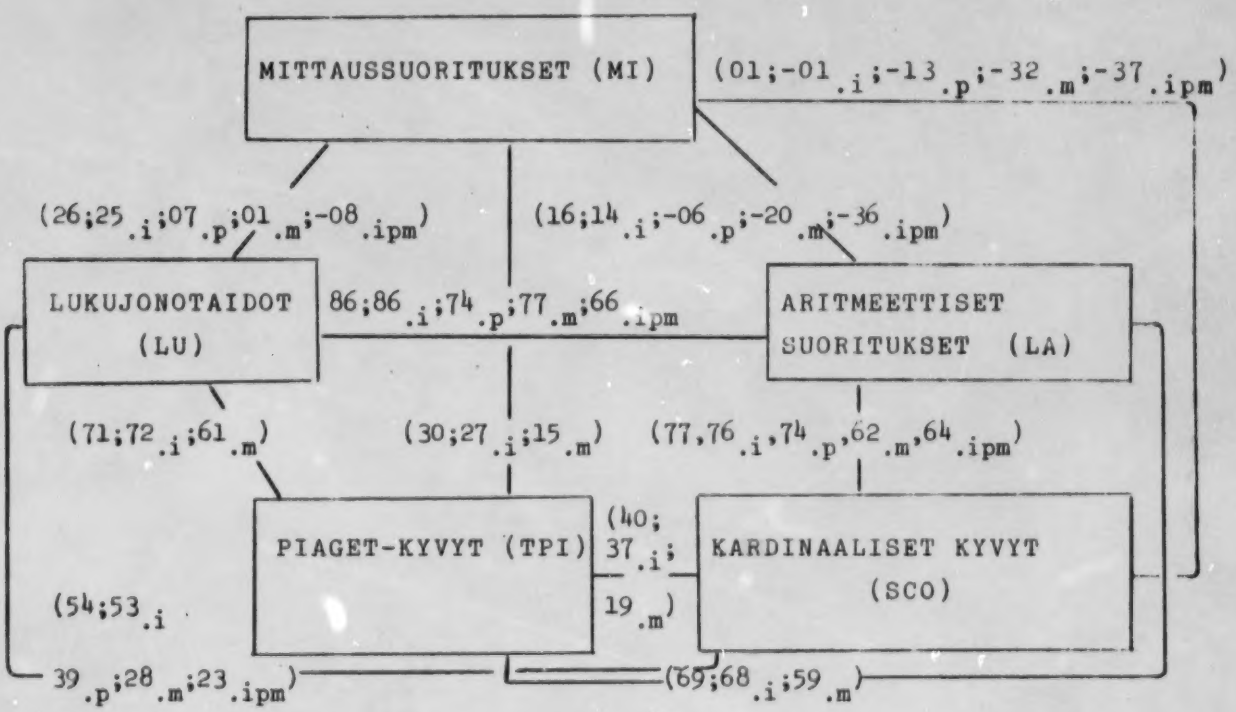
*** $p < .001$ ** $p < .01$ * $p < .05$

Taulukosta havaitaan, että lasten ikäjärjestyksellä on varsin vähäisiä yhteyksiä tutkittavien osa-alueiden makromuuttujiin. Vain Piaget-kyvyillä näyttäisi olevan tilastollisesti merkitseviä yhteyksiä lasten ikäjärjestykseen. Seuraavassa nähdään yksityiskohtaisemmin kyseisen kognitiokentän riippuvuussuhteet, kun vakioidaan IJ, MU, TPI erikseen ja yhdessä.

2. Tutkittavan kognitiokentän riippuvuussuhteiden mallit

Seuraavien tarkastelujen perusteella saadaan vastaus seuraavaan ongelmaan. Missä määrin lukujonotaitojen, aritmeettisten kykyjen sekä mittauskykyjen riippuvuudet selittyvät Piaget-kykyjen,

IPC-kykyjen sekä iän kautta? Riippuvuussuhteiden mallit on saatu korrelaatioiden sekä osittaiskorrelaatioiden avulla. Osittaiskorrelaatioille tullaan käyttämään seuraavia merkintöjä: $x_{.i}$, kun IJ vakioitu, $x_{.p}$, kun TPI vakioitu sekä $x_{.m}$, kun MU vakioitu. Kun IJ & TPI & MU on vakioitu, käytetään merkintää $x_{.ipm}$. Tässä x on reaaliluku, jolle $-1 \leq x \leq 1$. Lukuarvo, jossa ei ole alaindeksiä ilmoittaa taulukosta VIII 1 saatavan "puhdistamattoman" korrelaation.



Kaavio VIII 1. Tutkitun kognitiokentän osa-alueiden riippuvuusmalli I, missä .i; .p; .m; .ipm merkitsee, että IKÄ; TPI; MU vakioitu (N=35)

Mallista selviää mielenkiintoisia asioita. Ensinnäkin ikäjärjestyksen merkitys on kovin vähäinen kyseisen kognitiokentän riippuvuussuhteiden aiheuttajana. Tämä näkyy arvoista $x_{.i}$, jotka eivät paljoa eroa alkuperäisistä korrelaatioista x. Havaitaan, että mittaussuoritusten riippuvuudet lukujonotaitoihin ja aritmeettisiin kykyihin nähden selittyvät IPC- ja Piaget-kykyjen kautta. Sama koskee mittaussuoritusten ja kardinaalisten kykyjen suhdetta, joka alunperinkin oli lähes nolla. Mittaussuoritusten ja Piaget-kykyjen välinen korrelaatio jää matalaksi (+0.15), kun muisti on vakioitu.

Edellä sanottu tukee ajatusta mittaussuoritusten suhteellisesta riippumattomuudesta lukujonotaidoista ja aritmeettisista sekä kardinaalisista kyvyistä. Toisin sanoen nämä kyvyt ovat suhteellisen irrallisia "saarekkeita" lapsen mielessä. Samaa ei voida sanoa lukujonotaitojen ja aritmeettisten kykyjen välisestä suhteesta. Tämä suhde jää korkeaksi (+0.66) vaikka kognitiiviset kyvyt sekä ikäjärjestys on vakioitu. Myös Piaget-kykyjen sekä aritmeettisten kykyjen välinen korrelaatio jää korkeaksi (+0.59), kun muisti on vakioitu. Sama koskee Piaget-kykyjen ja lukujonotaitojen suhdetta. Myös kardinaalisten kykyjen ja aritmeettisten kykyjen väliset korrelaatiot pysyvät korkeina riippumatta kognitiivisten kykyjen ja iän vakioinneista. Toisaalta kardinaalisten kykyjen korrelaatiot Piaget-kykyihin ja lukujonotaitoihin putoavat alle tilastollisesti merkitsevien rajojen, kun muisti vakioidaan. Toisin sanoen IPC-kyky on tässä merkittävä taustatekijä kyseisten kognitiokentän osa-alueiden riippuvuussuhteiden syntymisessä. Seuraavasta taulukosta nähdään, missä määrin tarkastellun mallin muuttujat kykenevät selittämään toistensa vaihtelua.

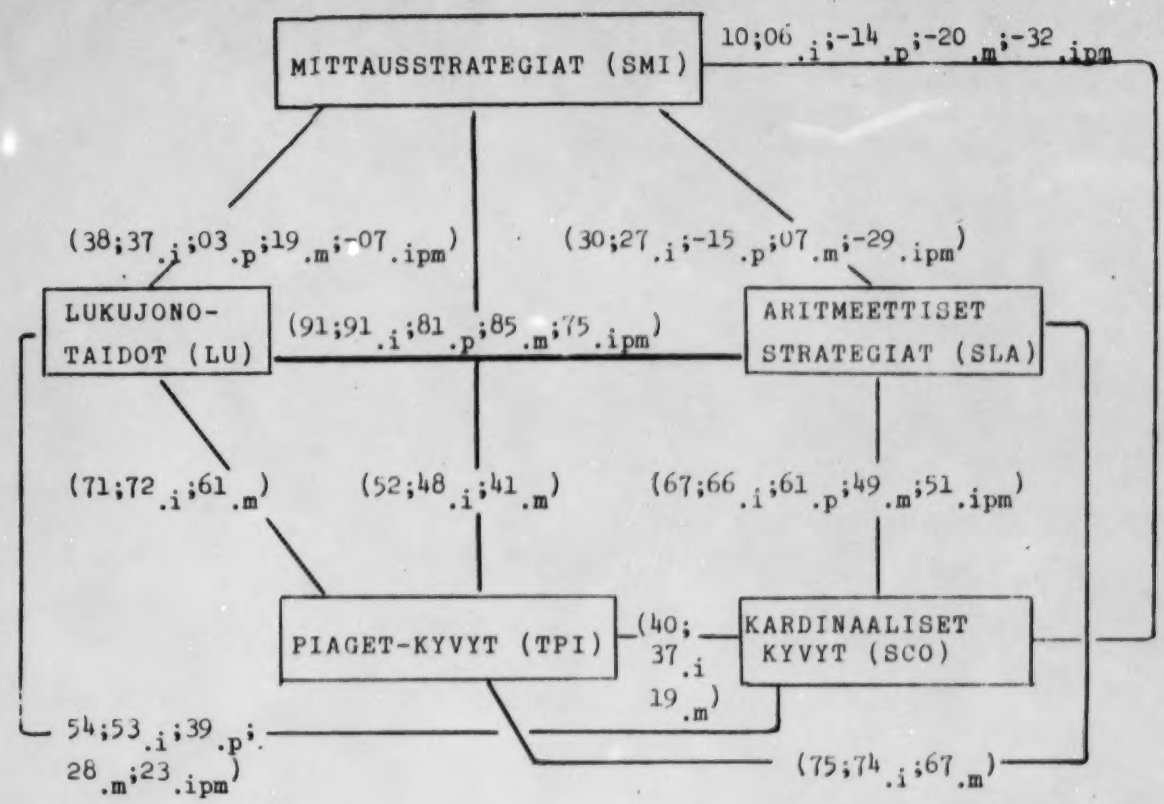
Taulukko VIII 2. Kaavion VIII 1 kognitiokentän muuttujien regressiomalli (N=35)

Selitettävä = Selittäjät; {IJ,TPI,MU,LU,LA,SCO,MI} - {selitettävä}	R^2
LA = 0.63 LU + 0.43 SCO	88
LU = 1.11 LA - 0.31 SCO	79
MI = 0.41 MU	17
TPI = 0.68 LU + 0.27 IJ	57

($p < 0.05$)

Kuten mallin perusteella oli ennakoitavissa nousevat aritmeettisten suoritusten ja lukujonotaitojen selitysasteet korkeiksi. Itse asiassa nämä osa-alueet selittävät parhaiten toisiaan. Lisää selitysvoimaa saadaan "luontevasti" kardinaalisten kykyjen taholta. Piaget-kykyjen parhaaksi selittäjäksi osoittautuu lukujonotaidot. Myös lasten ikäjärjestyksellä on tässä selitysvoimaa. Mittaussuoritusten parhaaksi ja ainoaksi merkitseväksi selittäjäksi osoittautuu IPC-makromuuttuja MU.

Seuraavaksi esitetään prosessiin ja strategioihin paremmin liittyvien makromuuttujien SLA, SMI sekä aiemmin tarkasteltujen LU, TPI ja SCO muuttujien riippuvuusmalli. Tässä mallissa käytetään samoja merkintöjä kuin mallissa VIII 1.



Kaavio VIII 2. Tutkitun "kognitiokentän" osa-alueiden riippuvuusmalli II, missä .i; .p; .m; .ipm merkitsee, että IJ; TPI; MU vakioitu (N=35)

Kuten oli odotettavissa prosessiin ja strategioihin perustuvat makromuuttujat SMI ja SLA käyttäytyvät yhdensuuntaisesti mallin VIII 1 makromuuttujien MI ja LA kanssa. Ainut ero on se, että kyseisten muuttujien SMI ja SLA korrelaatiot LU ja TPI muuttujiin ovat jonkin verran korkeammat kuin vastaavilla MI ja LA muuttujilla. Tämähän oli jo nähtävissä kyseisten kykyjen spesifimmeistä tarkasteluista edellisissä luvuissa. Mittausstrategioiden yhteydet lukujonotaitoihin sekä aritmeettisiin strategioihin selittyvät lähinnä lasten IPC- ja Piaget-kykyjen kautta. Tämä on yhdenmukaista aiemman kaavion VIII 1 mallin kanssa. Toisaalta Piaget-kykyjen ja mittausstrategioiden välille jää tilastollisesti merkitsevä yhteys, kun IPC-kyky on vakioitu. Piaget-kykyjen suhde aritmeettisiin strategioihin pysyy erittäin merkitsevällä tasolla, vaikka IPC-kyky on vakioitu. Tämä on yhdenmukaista aiempien lukujen spesifien tarkastelujen kanssa. Toisin sanoen Piaget-kyvyillä, kun ne perustetaan tiedostamiseen, on merkitystä kehittyneempien

aritmeettisten strategioiden hankinnassa. Odotetusti kaikkein korkein korrelaatio jää lukujonotaitojen ja aritmeettisten strategioiden välille, kun kognitiiviset kyvyt ja ikäjärjestys on vakioitu. Tämä on koulukäytännön kannalta tärkeää, koska lukujonotaidot todettiin varsin pitkälti hierarkisoituviksi. Tämän työn kaikki tulokset viittaavat siihen, että näiden taitojen kehittämisellä ja kehittymisellä on kovin läheinen yhteys aritmeettisten suoritusten ja strategioiden omaksumiselle. Samoin kardinaaliset kyvyt ovat hyvin läheisessä yhteydessä aritmeettisiin suorituksiin ja strategioihin, vaikka kognitiiviset kyvyt on vakioitu. Tätä tukee myös seuraava regressiomalli.

Taulukko VIII 3. Kaavion VIII 2 kognitiokentän muuttujien regressiomalli (N=35)

Selitettävä = Selittäjät;{IJ,TPI,MU,LU,SLA,SMI,SCO} - {Selitettävä}	R^2
SLA = 0.63 LU + 0.25 SCO + 0.20 TPI	89
LU = 0.91 SLA	83
TPI = 0.65 SLA + 0.32 SMI	66
SCO = 0.67 SLA	45
SMI = 0.52 TPI	27

($p < 0.05$)

Aritmeettisten strategioiden (SLA) selitysaste nousee siinä määrin korkeaksi, että uskaltaa sanoa aritmeettisia strategioita oleellisimmin säätelevien muuttujien löytyneen. Nämä ovat lukujonotaidot, kardinaaliset kyvyt sekä Piaget-kyvyt. Myös IPC-kyvyillä on merkitystä tiettyjen aritmeettisten tehtävätyyppien ratkaisulle, kuten on todettu aiemmin. Kuitenkaan IPC-kyvyillä ei näytä olevan niin suurta merkitystä aritmeettisten suoritusten ja strategioiden omaksumiselle kuin yllä mainituilla taidoilla ja kyvyillä. Mainittu koskee lähinnä yksinkertaisempia COBP ja SEPM tyyppejä. Olemmehan nähneet, että kehittyneemmät lukujonotaidot sekä aritmeettiset kyvyt riippuvat oleellisesti myöskin IPC-kyvyistä. Miten sitten saavutettuja tuloksia hyödynnettäisiin matematiikan alkuopetuksessa sekä oppimisvaikeuksien voittamisessa? Tarkastelen aluksi tilannetta oppimisvaikeuksien näkökulmasta.

3. Matematiikan oppimisvaikeuksiin liittyviä kysymyksiä

Edellä on nähdäkseni käynyt ilmi, kuinka monisäikeisistä ongelmista on kysymys, kun tarkastellaan koulutulokkaan matemaattista ongelmanratkaisua. Koulutulokkaan aritmeettiset prosessit ja strategiat riippuvat suuresti tarkasteltavasta ongelmatyypistä. Samoin näitä prosesseja ja strategioita säätelevät lukujonotaidot sekä kognitiiviset Piaget- ja IPC-kyvyt. Täten ei ole ihme, että matematiikan oppimisvaikeuksia syntyy ja että niiden paikallistaminen saattaa olla ajoittain hyvinkin vaikea ja vaativa tehtävä. Oppimisvaikeuksien ilmaantuessa pitäisi kyetä vastaamaan esimerkiksi seuraaviin kysymyksiin: A. Onko kysymys oppilaan omien spontaanien prosessien ja strategioiden kehittymättömyydestä? Jos näin on, niin mistä tämä johtuu.

B. Onko kysymys näiden spontaanien prosessien ja strategioiden sopimattomasta yleistämisestä tai sisäistämisesta? Jos näin on, niin miten korjataan (vrt. Ginsburg 1977).

C. Onko kysymys näiden spontaanien prosessien ja strategioiden hyödyntämättömyydestä oppimis- ja opetustilanteessa (vrt. Ginsburg 1977)?

D. Onko kysymys sopimattomasta lähestymistavasta tietyn matemaattisen sisällön problematiikkaan ja symbolisaatioon? Jos näin on, niin miten lähestymistapaa kannattaisi muuttaa (vrt. Keranto 1981)?

E. Asettavatko annetut tehtävätyypit liian suuria vaateita IPC-kyvyille? Jos näin on, niin voidaanko tehtävät paloitella sopiviin osasuorituksiin (vrt. Case 1980b)?

F. Onko kysymys yleisistä oppimisvaikeuksista vai spesifeistä matematiikan vaikeuksista? Jos on kysymys yleisistä oppimisvaikeuksista, niin johtuvatko nämä affektiivisen alueen häiriöistä vaiko yleisestä lahjattomuudesta vaiko aivovauriosta. Jos on kysymys spesifeistä matematiikan oppimisvaikeuksista, niin johtuvatko nämä edellä esitetyistä prosessiin liittyvistä vaikeuksista vaiko pahimmassa tapauksessa aivovauriosta, joka voi ehkäistä matemaattisten toimintojen havaitsemista, tulkintaa, toimeenpanoa tai tarkistusta.

Tässä työssä ei ole mahdollista tarkastella kovinkaan yksityiskohtaisesti esitettyjä ongelmia. Viimeksi esitetyn ongelman F osalta viittaan seuraaviin töihin (Keranto 1981, Magne 1978, 1980, Malinen 1978 ja Puro 1972). Ongelmien B ja C osalta

viittaan Ginsburgin sekä ongelman E kohdalta Case'n pohdiskeluihin (Case 1980b, Ginsburg 1977). Seuraavassa tarkastelen lyhyesti lähinnä ongelmiin A, C ja D liittyviä kysymyksiä. Ovathan nämä ongelmat kuten myös ongelma E lähellä tämän työn teoreettisia ja kokeellisia pohdiskeluja ja tuloksia. Toisaalta on syytä muistuttaa, että alla olevat pohdiskelut jäävät osin keskustelun asteelle, koska tämän työn kokeellisessa osassa ei tutkittu eksplisiittisesti matematiikan oppimisvaikeustapauksia.

4. Pitkistä prosesseista ekonomisiin prosesseihin

Informaation tehokkaan prosessoinnin kannalta lyhentyneet toiminnot ovat ensiarvoisen tärkeitä. Tämä koskee luonnollisesti myös aritmeettisia sisältöjä ja tehtävätyyppien ratkaisuja. Olemme nähneet, että ennen kuin lapsi saavuttaa matemaattisen tosiasiatiedon tason (esim. 5+3=8), on hänen kyettävä integroimaan moninaisia skeemoja. Toisaalta tarvittavien osaskeemojen muodostukseen vaikuttaa monet tekijät. Aritmeettisten perustyyppien ratkaisemiseksi lapsen on ensinnäkin koordinoitava laskemis- ja lukumäärämerkitys. Aiemmin on nähty, että tämä "kardinaaliperiaate" on yleisesti ottaen koulutulokkaiden hallussa. Toisaalta aritmeettisten tyyppien ratkaisun perusedellytyksenä on tarkan laskemisen taito, joka taas riippuu monista osatekijöistä, joita on tarkasteltu aiemmin. Olemme nähneet, että osa lapsista suorittaa aritmeettiset tehtävätyypit pitkästi ja osa puolipitkästi tai tosiasiatietoon perustuen. Nämä strategiat vaihtelivat riippuen tehtävätyypeistä sekä tarkasteltavien lukujen erotuksen koosta. Myös tarkasteltavalla lukualueella oli merkitystä prosessien pituuteen. Täten on kovin vaikea sanoa kehittyvätkö kyseiset toiminnot aina puolipitkien toimintojen kautta, mikäli tilanteeseen ei pyritä vaikuttamaan. Loogiisesta ja informaation prosessoinnin kannalta on oletettavaa ja toivottavaa, että tosiasiatietoon päästään yleensä juuri puolipitkien toimintojen kautta. Arvelen, että tähän prosessiin pitäisi opetuksen puuttua. Toisin sanoen lasten pitkät suoritusprosessit olisi suunnattava puolipitkien toimintojen kautta tosiasiatietoon. Tällöin tulevat aritmeettisista tyypeistä keskeiselle sijalla COBP, JOIP ja JOIM tyypit. Erityisesti tyypit JOIP ja JOIM näyttäisivät soveltuvan toimintojen lyhentämiseen. Mikäli opetus tapahtuisi korvaamisalueella (esim.

4+2=?, 5,6) sekä yhteenlaskettavien että summanarvon suhteen, voisi olettaa saavutettavan hyviäkin tuloksia. Tällä alueella lapsi oppisi näkemään (jopa kirjaimellisesti), että on tarpeetonta laskea aina alusta asti. Aivan yhtä hyvin voi jatkaa suoraan toisen yhteenlaskettavan ilmoittaman lukusanojen lukumäärän verran. Toisin sanoen lapsi oppii ymmärtämään, että ensimmäisen yhteenlaskettavan luettelu 1,2,3,4 on osa alusta asti pitkästi luettelua 1,2,3,4,5,6. Tällöin lyhennys 5,6 tai 4,5,6 korvaa pitkän luettelut. Kun lapsi oppii näkemään ja ymmärtämään tämän idean lukujen korvaamisalueella, on mahdollista että toiminnot on yleistettävissä korvaamisalueen ulkopuolellekin. Tällöin lapsen on helpompi löytää jatkossa suurempien lukujen keskinäiset suhteet, joiden keksiminen pitkien toimintojen tapauksessa on ilmeisen vaikeaa. Tällöin myös madalletaan kirjalliseen symboliikkaan siirtymiskynnystä. Viittaavathan symbolit lyhentyneiden toimintojen tasolla paremmin yksittäiseen lukuun tai lukujen suhteeseen kuin tiettyihin pitkiin lukusanojen käytön jonoihin. Edellä sanottu vaatisi opetustutkimuksia, joissa selvitetään samalla kirjalliseen symboliikkaan siirtymisen ongelmat. Tällöin voitaisiin vaikuttaa myös Piaget-kykyihin ja todentaa tarkemmin miksi ne ovat todetussa yhteydessä aritmeettisten strategioiden kvalitatiivisen kehitysasteen kanssa. Samoin nähtäisiin paremmin miten koulutulokkaiden spontaaneja strategioita ja ratkaisuprosesseja voitaisiin hyödyntää opetustyössä. Tämän työn kokeellisten ja teoreettis-loogisten pohdiskelujen ja tulosten perusteella lyhentymisprosessi on läheisessä yhteydessä Piaget-kykyjen ja lukujonotaitojen kanssa. Voidaanko näihin taustatekijöihin vaikuttaa ja mitä merkitystä tällä vaikutuksella on aritmeettisiin prosesseihin ja strategioihin? Siitä seuraavassa.

5. Aritmeettisten prosessien ja strategioiden kehittämiseen vaikuttavista taustatekijöistä

Tämän tutkimuksen yksi selvä tulos on, että Piaget'n tiedostamiseen perustuvat kyvyt sekä lukujonotaidot ovat hyvin läheisessä yhteydessä aritmeettisten prosessien ja strategioiden kvalitatiivisen kehitysasteen kanssa. Täten voisi olettaa, että vaikuttamalla näihin kykyihin ja taitoihin, voitaisiin nostaa lasten

prosessien ja strategioiden kehitysastetta ekonomiseen suuntaan. Koska tämä työ ei ole opetus- tai harjoittelututkimus tyydyn lyhyesti pohdiskelemaan tilanteeseen mahdollisesti liittyviä ongelmia ja mahdollisuuksia.

Piaget'n näkemys lapsen kognitiivisen kehitystason nostamisesta on opetuksen näkökulmasta varsin pessimistinen. Itse asiassa Piaget ajattelee, että lasten pitäisi spontaanisti tai itsekeksivää menetelmää apuna käyttäen hankkia tarvittavat tiedolliset rakenteet. Tätä hankintaa määrää suuresti lapsen kognitiivinen kehitysaste. On todisteita siitä, että Piaget'n kehityskausiin liittyvien kognitiivisten sisältöjen oppiminen ei olisikaan kovin lujasti sidottu näiden kehityskausien yleiseen saavuttamiseen. Itse asiassa on viitteitä siitä, että tutoriaaliset harjoittelumenetelmät - sääntöopetus, havainnoimisopetus, sopusointuharjoitus ja palauteopetus - ovat tehokkaampia kuin Piaget'n esittämä itsekeksivä menetelmä kognitiivisten sisältöjen oppimisessa (ks. esim. Brainerd 1978: 270 - 298). Tutoriaaliset menetelmät näyttävät toimivan myös Piaget'n operaatioiden I tason lasten osalta, kun itsekeksivä menetelmä ei tähän pysty (ks. esim. Brainerd 1978, Siegel & Brainerd 1978). Nämä tulokset vihjaavat siihen, että Piaget'n kognitiivisiin sisältöihin ja tätä kautta kehitysasteisiin voidaan ehkä vaikuttaa. On kuitenkin syytä korostaa, että ei ole tietoa siitä mitä merkitystä tällaisella kehityksen nopeuttamisella on aritmeettisten prosessien ja strategioiden kehittämisen kannalta. Tähän tarvitaan opetustutkimuksia, joihin myös Suomessa alkaisi olla mahdollisuuksia.

Miten sitten on lukujonotaitojen kehittämisen laita? Työn kokeellisen ja teoreettisen osan perusteella lukujonotaidoilla ja aritmeettisilla kyvyillä on selviä spesifejä yhteyksiä. On ilmeistä, että lukujonotaitoihin voidaan vaikuttaa ja on vaikutettu kouluopetuksessa. On kuitenkin ilmeistä, että nämä vaikutukset ovat olleet pitkälti intuition varassa ilman selvää kuvaa lukujonotaitojen ja aritmeettisten prosessien välisistä yhteyksistä. Itse asiassa perusyhteenlaskutyyppeihin COBP, JOIP ja JOIM liittyvät kehittyneemmät strategiat ovat sidoksissa ylöspäinlukujonotaitoihin. Esimerkiksi tehtävä 7+ __= 9 voidaan ratkaista käyttäen

UPTO ja UPBY taitoja; 7,8,9 - vastaus 2. Sama koskee tehtävää 7+2 = ? kun käytetään puolipitkää strategiaa. Tämä edellyttää luonnollisesti UP ja TO taitoja, jotka on todettu kokeellisessa osassa edeltävän kehittyneempiä UPTO ja UPBY taitoja.

Tehtävätyypit SEPM, RJOIM ja COBM voidaan taas monasti ratkaista alaspäin lukujonotaidoilla kuten on osoitettu aiemmin. Esimerkiksi tehtävä 2+__=7 voidaan ratkaista ekonomisesti käyttämällä DOTO ja DOBY taitoja; 7,6,5 vastaus 2. Olemme nähneet, että näihin alaspäin taitoihin ovat läheisessä yhteydessä myös relationaaliset AF, BEF ja BET taidot. Myös nämä ovat harjoitettavissa ja liitettävissä aritmeettisten strategioiden kehitystason nostamiseen. Ei ole myöskään syytä unohtaa SABY taitoja, jotka ilmaisevat kykyä edetä lukujonossa tietyin välein eteenpäin. Tällaisia strategioitahan aikuiset käyttävät laskiessaan suurempia lukumääriä yhteen tai erottaessaan pois suurempia lukumääriä. Regressioanalyysien perusteella SABY taidot olivat yhteydessä juuri tämäntyyppisiin tilanteisiin SCOBP, SJOIP ja SSEPM. En lähde tässä tämän tarkempaan spekuloimaan miten ja missä kohden tarkastellut lukujonotaidot otetaan esille ja opetetaan matematiikan alkuopetuksen ensimmäisenä kouluvuotena. Joka tapauksessa näillä taidoilla näyttää olevan niin selvät yhteydet aritmeettisiin suorituksiin ja strategioihin, että ne on otettava systemaattisemmin huomioon matematiikan alkuopetuksessa ja sen opetussuunnitelmien teossa.

6. Keskeisten aritmeettisten tehtävätyyppien oppimisesta ja opetuksesta

Kokeellisten tulosten perusteella tietyt aritmeettiset tehtävätyypit sisältävät prosessoinnin kannalta enemmän ongelmia kuin toiset tyypit. Erityisen ongelmallisia ovat COMP ja COBM tyypit. Joukkojen kvantitatiiviseen vertailuun liittyvät COMP-tehtävät osoittautuivat kaikkein hankalimmiksi ja suuresti riippuviksi Piaget-kyvyistä tai operationaalisesta kehitysasteesta. Toisaalta tehtävätyypit COBP, JOIP, SEPM, JOIM sekä RJOIM ovat hyvinkin läheisessä yhteydessä lukujonotaitoihin, jotka tämän työn perusteella ovat pitkälti hierarkisoituneita. Tämä antaa mahdollisuuksia opetustyölle. Lukujonotaitojen kehittämisen kautta on ilmeisesti mahdollisuus vaikuttaa aritmeettisiin suorituksiin ja

strategioihin ja tätä kautta oppimisvaikeuksien ehkäisyyn ja voittamiseen. Mitä oppimisvaikeuksien ehkäisyyn tulee, niin opetuksessa ei kannata siirtyä liian aikaisin suuriin yhteenlaskettaviin tai vähentäjiin. Sama koskee kunkin tehtävän lukujen keskinäisiä suuruussuuhteita. Periaatteena näyttäisi olevan, että mitä suurempi on tarkasteltavien lukujen erotus sitä suurempia ongelmia ilmaantuu. Tämä on täysin ymmärrettävää, kun tarkastellaan tilannetta IPC-kyvyn näkökulmasta. Mikäli lisättävä tai vähennettävä luku on suurempi kuin 3 tai 4, asettaa tämä suurempia vaateita yksilön IPC-kyvyille sekä aiemmille aritmeettisille skeemoille ja muistamisstrategioille. Täten matematiikan alkuopetuksessa kannattaisi aluksi keskittyä tehtäviin a $\pm$ b, joissa parametrin b lukuarvo on korkeintaan kolme. Vaihdantalain sovellutuksena tulevat myöhemmin esille yhteenlaskutehtävät, joissa toinen yhteenlaskettava on suurempi kuin kolme. On toinen ongelma miten matematiikan nykyisen vaatimattoman tuntimäärän puitteissa kyetään mainittua ideaa noudattamaan niin opetustyössä kuin kirjanteossa. Kyseinen lähestymistapa vaatisi rauhallisen etenemisen sekä yksilöllisen ohjaamistavan. Tähän ei ilmeisesti nykyisillä aikaresursseilla ole mahdollisuuksia varsinkin, kun myös tehtävätyypit a $\pm$? = b on otettava esille jo ensimmäisen kouluvuoden aikana. Näissäkin tehtävätyypeissä pätee edellä sanottu raja pienempi tai yhtäsuuri kuin 3 (? $\leq$ 3).

Mitä tulee oppimisvaikeuksien voittamiseen, niin siihen tämä tutkimus voi antaa vain viitteellistä tietoa. Tämähän ei ole opetustutkimus, kuten aiemmin on jo korostettu. Sen uskaltanee todeta, että matematiikan alkuopetuksen oppimisvaikeudet ovat lähinnä siirtymisvaikeuksia toiminnallis-suullisesta aritmetiikasta kirjalliseen aritmetiikkaan. Mikäli kirjallisessa aritmetiikassa esiintyy ongelmia, vihjaavat nämä oletettavasti useimmiten aiemmin tarkasteltuihin prosessointivaikeuksiin ja skeemojen kehittymättömyyteen. Tässäkin vaadittaisiin opetustutkimuksia. Vasta tällöin voidaan sanoa auttaisiko esimerkiksi Galperinin ehdottama menetelmä, jossa ikään kuin palataan matemaattisen suorituksen primitiivisemmille asteille. Kun käsitteet on kunnolla perustettu toiminnallisiin tilanteisiin siirrytään keskusteluvaiheen kautta päässätasolle sekä kirjalliseen symboliikkaan (ks. Galperin 1957, Keranto 1979, Magne 1980).

IX KOONTA JA POHDISKELUA

Kootaan ensin tutkimuksen keskeiset tehtävät kysymysten muotoon:

A. Missä määrin ja miten Piaget-kyvyt säätelevät yksilön suoriutumista ja strategioita käytännön kannalta keskeisissä yhteen- ja vähennyslaskutyypeissä?

B. Mitkä ovat informaation käsittelykapasiteetin yhteydet Piaget-kykyihin sekä aritmeettisiin ja mittauksellisiin suorituksiin ja strategioihin?

C. Miten lukujonotaidot liittyvät ja säätelevät yhteen- ja vähennyslaskusuorituksia ja strategioita sekä mitkä ovat niiden yhteydet Piaget-kykyihin ja informaation käsittelykapasiteettiin?

D. Muodostavatko keskeiset lukujonotaidot sekä yhteen- ja vähennyslaskutyypit hierarkioita ja miten nämä hyödynnettäisiin matematiikan alkuopetuksessa?

E. Mitkä ovat tutkittavan kognitiokentän osa-alueiden riippuvuussuhteet makrotasolla suoritusten oikeellisuuden ja strategioiden näkökulmasta?

Tehtävä A oli sikäli mielenkiintoinen, että on edelleen epäselvyyttä siitä, mikä on Piaget'n operationaalisten asteiden merkitys aritmeettisten suoritusten ja strategioiden hankkimiselle. Tämän työn perusteella on nähtävissä, että nimenomaan tiedostamiseen perustuvilla Piaget-kyvyillä on läheinen yhteys laadullisesti kehittyneempien strategioiden hankinnalle. Tämä tukee Piaget'n ajatusta siitä, että omien tiedollisten prosessien tiedostaminen on läheisessä yhteydessä laadullisesti kehittyneempien suoritusten kanssa. Myös määrällisiin aritmeettisiin suorituksiin oli Piaget-kyvyillä yhteyksiä. Tämä koski lähinnä SEPM, COBM ja COMP tyyppejä. Erityisesti lukumäärien vertailuun liittyvä COMP tyyppi selittyi varsin korkeasti Piaget-kyvyillä (56 %). Parhaana selittäjänä oli odotetusti ekvivalenssin ja inekvivalenssin säilyvyyteen liittyvä kyky. Toisaalta yhteenlaskuun läheisesti liittyvät COBP, JOIP ja JOIM tyypit selittyivät heikosti Piaget-kyvyillä (12 % - 15 %). Parhaana selittäjänä oli näissä transitiivipäättely, joka aiemmissa tutkimuksissa on osoittautunut olevan läheisessä yhteydessä aritmeettisten suoritusten kanssa (Brainerd 1979, Keranto 1981). Tehtävän A. osalta saavutettuja tuloksia

voidaan pitää järkevinä ja aiempia tutkimustuloksia täydentävinä. Tulokset osoittavat, että Piaget-kyvyt liittyvät eri tavoin eri aritmeettisiin tyyppeihin. Tämä osoittaa miten tärkeää olisi suorittaa kuhunkin tehtävätyyppiin liittyvä looginen ja informaatioprosessointi-analyysi ennen kuin siirrytään kokeellisiin mittauksiin. Tämä tulee olemaan jatkuva haaste tuleville tutkimuksille ja tulevaisuuden koulukäytännölle. Toinen tärkeä yleinen huomio on se, että mikäli halutaan Piaget-muuttujille selitysvoimaa, on huomioitava tiedostamiskriteerin merkitys. Tässä työssä tämä tuli näkyviin varsin selkeästi ja näin oli alunperin tarkoituskin. Toisin sanoen pelkkään suorituskriteeriin perustuvat Piaget-muuttujat olivat kovin heikkoja selitysvoimaltaan koulutulokkaiden iässä. Itse asiassa ne olivat joko liian vaikeita tai liian helppoja, jolloin yleensä ei hajontaa syntynyt. Poikkeuksen muodosti yksi-yksi vastaavuuden säilyvyyteen liittyvät osiot. Tämän ohella ei liene oikeutettua puhua Piaget-operaatioista ellei oteta huomioon Piaget'n asettamaa tiedostamiskriteeriä. Kolmas nähdäkseni tärkeä huomio koskee Piaget'n käyttämiä koeasetelmia ja kysymyksen asettelua. Nämä ovat monin kohdin vaikeaselkoisia ja monikäsitteisiä sisältövaliditeetin näkökulmasta tarkasteltuna (vrt. Keranto 1981). Tähän liittyen saatiin tässä työssä mielenkiintoinen tulos, joka on kuitenkin syytä tarkistaa jatkomittauksissa. Työssä todettiin, että inkluusiotehtävien kysymyksen asettelulla oli ratkaiseva merkitys lasten suoritus- ja tiedostamistasoon. Vihjesanan kaikki tai kaikkiaan lisäyksellä todettiin seuraavaa. Ensinnäkin ne lapset, joille esitettiin inkluusiotehtävät vihjesana-muodossa, pärjäsivät samanveroisesti kaikissa kuudessa osiossa. Toisaalta ne lapset, joille puolet kyseisistä tehtävistä esitettiin traditionaalisessa muodossa, suorittavat traditionaaliset tehtävät kovin heikosti. Itse asiassa kävi niin, että ne lapset, jotka olivat traditionaalisten tehtävien osalta 0-tasolla (ei onnistu) osasivat vastaavat vihjesanatehtävät, joko ilman selitystä (1-taso) tai selityksineen (2-taso/11 oppilasta 20 oppilaasta).

Erot olivat erittäin merkitseviä. Tämä osoittaa, miten herkkiä Piaget-tehtävät voivat olla instruktion suhteen. Itse asiassa kyseisen tuloksen perusteella voisi sanoa, että koulutulokkaat kykenevät luokan ja sen osaluokan kvantitatiiviseen vertailuun. Tämä tulos on sikälikin mielenkiintoinen, että se antaa

mahdollisuuksia luokittelun ja sarjoittamisen yhdensuuntaiseen kehitykseen. Tämä mahdollisuushan oli "laskuista" pois, jos käytettiin traditionaalisia tehtävänasetteluja, jotka eivät ilmeisesti paljastaneet lasten todellista ymmärrystä kyseisestä kvantitatiivisesta suhteesta.

Tehtävään B liittyen kokeiltiin neljää IPC-kykymittaria. Nämä mittarit pyrittiin laatimaan siten, että niillä olisi yhtymäkohtia aiempiin tutkimuksiin sekä tämän työn sisällöllisiin tutkimuskohteisiin. Mittarien laadinnan lähtökohtana olivat Case'n tutkimukset (Case 1980a). Lukujonosisältöön liittyen kokeiltiin kahta mittaria sekä laskemis- ja mittaamisyhteyksiin liittyen yhtä mittaria kumpaakin. Luotettavimmaksi osoittautui lukujonotaitoihin liittyvä ESP (Enumeration Span) mittari, jossa lapselle annetaan etukäteen ne luvut, joihin hänen on lueteltava (rel= 0.79). Tämä mittari muistuttaa Case'n käyttämää BDS mittaria (Case 1972). Muut kolme mittaria ESP(O), CSP (Counting Span) ja MEASP (Measuring Span) olivat rakenteellisesti samanlaisia Case'n käyttämän CSP mittarin kanssa (Case 1980a). Koulutulokkaiden Span arvojen todettiin olevan tyypillisesti 2 tai 3. Tämä vastaa Case'n ja Pascual-Leonen ilmoittamia keskimääräisiä lukuja (Case 1972, Pascual-Leone 1970). Toisaalta havaittiin, että lasten span arvot riippuivat oleellisesti tehtävän luvuista sekä erityisesti spesifistä sisällöstä. Toiminnon automaation aste näkyi vertailtaessa lukujonosisältöjen span arvoja laskemis- ja mittaussisältöjen span arvoihin, jotka jäivät selvästi matalammiksi. Nämä erot näkyivät jatkossa selitettäessä Piaget-kykyjä, lukujonotaitoja sekä aritmeettisia ja mittauskykyjä IPC-kyvyillä. Lukujonotaitoihin liittyvät IPC-kyvyt erottelivat transitiivi- ja substituutiopäätelmiä sekä laskemiseen ja mittaukseen liittyvät IPC-kyvyt säilyvyyspäätelmiä. Todettiin, että ne lapset, joiden IPC-span jää normaalisti alle arvon 2,erosivat merkitsevästi mainituissa suorituksissa muiden lasten (span $\geq$ 2) suorituksista. Suoritetut askelittain (stepwise) etenevät regressioanalyysit olivat yhdenmukaisia t-testien kanssa. Tämä koskee yleensäkin kaikkia tämän työn analyysejä. Mainittakoon, että tässä työssä valittiin regressiomalleiksi vain ne, joissa kaikki muuttujat lisäsivät selitysosuutta vähintäinkin melkein merkitsevällä tasolla eli F ja t-arvot vähintäin 5 % tasolla. IPC-kyvyt kykenivät selittämään

Piaget-kykyjen vaihtelusta heikoimmillaan 11 % (inkluusiopäättely) sekä parhaimmillaan 57 % (ekvivalenssin & inekvivalenssin säilyvyys). IPC-kykyjen selitysvoima lukujonotaitoihin, joita tarkastellaan hetken päästä tarkemmin, vaihteli 14 %:sta 48 %:iin. Kaikkein parhaimmiksi selittäjiksi osottautuivat lukujonosisältöön liittyvät IPC-kyvyt, kuten oli loogisesti ottaen odotettavissa. CSP ja MEASP kyvyillä todettiin olevan kovin vähäisiä yhteyksiä lukujonotaitojen hankkimiselle. Sama ilmiö havaittiin, kun tutkittiin IPC-kykyjen merkitystä ja yhteyksiä aritmeettisiin suorituksiin ja strategioihin. Aritmeettisiin suorituksiin nähden selitysprosentit vaihtelivat välillä 14 % (SEPM) - 40 % (COBM). Parhaaksi selittäjäksi nousi ESP kyky. Aritmeettisten strategioiden selitysosuudet vaihtelivat välillä 13 % (SEPM) - 46 % (COBM), ollen jonkin verran korkeampia kuin vastaavat suoritusten oikeellisuuteen perustuvien muuttujien selitysasteet. Tilanne muuttui, kun tarkasteltiin mittauskykyjen ja IPC-kykyjen välisiä suhteita. Täällä parhaiksi IPC-selittäjiksi nousivat MEASP ja CSP kyvyt. On mielenkiintoista havaita, että lukujono- ja aritmeettisissa yhteyksissä parhaat selittäjät olivat lukujonosisältöön liittyvät IPC-kyvyt. Toisaalta mittauskykyjen ja Piaget-kykyjen tapauksessa parhaimmat selittäjät löytyvät CSP ja MEASP kyvyistä. Vaikka tämä tulos vaikuttaa järkevältä ja osin odotetultakin, on siihen suhtauduttava varoen. Tämä johtuu lähinnä CSP ja MEASP tyyppeihin liittyvistä luotettavuusongelmista. Toisaalta tässä työssä käytetty tyypillisen suorituksen systeemi saattoi lieventää osioiden vaikeusasteissa havaittuja eroja. Tämän ohella työssä käytettiin myös kunkin koehenkilön maksimisuoritukseen perustuvaa span systeemia, joka oli yhdensuuntainen moodikriteeristöön liittyvien tulosten kanssa. Joka tapauksessa IPC-kykyjen osalta tämän työn tuloksia voidaan pitää alustavina ja tutkimuskenttää aukovana.

Tehtävät C ja D liittyvät siinä määrin toisiinsa, että niitä tarkastellaan tässä yhtenä kokonaisuutena. Toisaalta osa näiden tehtävien ongelmista tuli jo käsiteltyä edellä. Lukujonotaidot sekä aritmeettiset yhteen- ja vähennyslaskuprosessit muodostavat tämän työn sisällöllisen ytimen. Työn keskeiset lukujonotaidot luokiteltiin eteenpäin lukujonotaitoihin (ENUM, UP, TO, UPTO, UPBY ja SABY), taaksepäin lukujonotaitoihin (DO, DOTO ja DOBY)

sekä relationaalisiin lukujonotaitoihin (AF, BEF, BET ja BS). Näistä BS taidot ovat lähinnä kardinaaliyhtesisältöön liittyviä taitoja. Ne otettiin mukaan lukujonotaitotarkasteluihin, koska näissä tehtävissä ei ollut ulkoisia apuvälineitä käytössä. Yllä mainittujen osataitojen valinta perustui loogiseen analyysiin, Fusonin tutkimuksiin sekä aiempaan tutkimustyöhöni (Fuson et al 1982, Keranto 1981). Osoittautui, että kyseiset taidot ovat pitkälti hierarkisoituvia. Tämä testattiin Guttmanin skaalan avulla käyttäen kriteereinä CR, MMR ja PPR arvoja (Guttman 1944, White & Salz 1957). Erityisesti eteenpäin ja relaationaalisten taitojen osalta saavutettiin nk. "täydellisiä" hierarkioita. Esimerkiksi lukualueen 1 - 10 paras hierarkia oli UP--TO--UPTO --UPBY; CR=0.96, MMR=0.82 ja PPR=0.78. Vastaavasti lukualueen 10 - 20 paras ja kirjaimellisesti täydellinen hierarkia on: AF--BEF--BET, CR=1.00, MMR=0.76 ja PPR=1.00. Ongelmallisia tapauksia hierarkioiden muodostuksessa olivat UPTO- ja UPBY-taitojen kehitykselliset suhteet. Sama tilanne oli DOTO- ja DOBY-taitojen kehityksellisen suhteen osalta. Lukualueen 1 - 10 taaksepäin taitojen hierarkia "sortui" juuri tähän suhteeseen. Toisaalta lukualueella 10 - 20 saavutettiin seuraava"täydellinen" hierarkia: DOBY"2"--DO--DOBY"5"--DOTO -- DOBY"8", CR=0.92, MMR=0.66 ja PPR=0.76.

Edellä olevat tulokset viittaavat lukujonotaitojen systemaattisen kehittämisen mahdollisuuteen. Tämä tulee erityisen tärkeäksi siksi, että lukujonotaidot osoittautuivat tässä työssä aritmeettisten suoritusten ja strategioiden päteviksi selittäjiksi. Näin oli sekä loogisen analyysin että kokeellisten tulosten perusteella. Selitysasteet vaihtelivat suoritusten oikeellisuuden näkökulmasta välillä 22 % (JOIP) - 86 % (RJOIM). Myös tyypeissä JOIM ja COBM havaittiin korkeat selitysasteet 73 % ja 72 % vastaavasti. Vielä parempiin selitysasteisiin päästiin, kun aritmeettisia strategioita selitettiin mainittujen lukujonotaitojen avulla. Selitysasteet vaihtelivat välillä 45 % (COBP) - 84 % (COBM). Tyyppeihin COBP, JOIP ja SEPM liittyvien strategioiden paras selittäjä oli SABY-taito eli taito edetä lukujonossa tietyin välein. JOIM- ja RJOIM-tyyppien parhaaksi selittäjäksi osoittautui BEF-taito eli kyky ilmoittaa luvun välitön edeltäjä. COBM-tyypin strategioiden parhaaksi selittäjäksi nousi DOBY-taidot, jotka korreloivat korkeasti UPBY-taitojen kanssa. Tämä on loogista, sillä COBM tehtävät edellyttävät kykyä määrätä käytettyjen lukusanojen lukumäärä.

Kvantitatiivisen vertailun COMP (COMPARE) parhaaksi selittäjäksi nousi BS-taidot, jotka vastaavat rakenteellisesti COMP-tehtäviä. Selitysaste oli 59 %.

Tämän työn lukujonotaitojen ja aritmeettisten prosessien välisiin suhteisiin liittyvät tulokset vaikuttavat siinä määrin luotettavilta ja järkeviltä, että niitä voitaisiin ehkä käyttää opetussuunnitelman laadinnassa ja oppikirjojen teossa ensimmäisen kouluvuoden osalta. On nimittäin niin, että jos todella halutaan eriyttää opetusta, on ilmeisesti mentävä analysoimaan kunkin aritmeettisen tyypin ekonomiset ja mahdolliset strategiat. Kun tähän liitetään lukujonotaitojen kehittäminen, on ilmeisesti mahdollisuus vaikuttaa ja jatkaa opetusta niistä toiminnoista, joita lapsella jo on. Toisaalta tähänkin sisältyy vielä runsaasti ongelmia. Yhden keskeisen tekijän muodostaa työssä todetut läheiset yhteydet Piaget-kykyjen ja lukujonotaitojen välillä. Yleisesti ottaen Piaget-kykyjen selitysvoima lukujonotaitoihin nähden oli alle 50 %, mutta tärkeissä UPBY, DOBY sekä BEF taidoissa selitysosuudet olivat 61 %, 62 % ja 58 %. Parhaina selittäjinä olivat näissä taidoissa säilyvyyskyvyt TNC ja TLC. Tämä vihjaa, että nämä korkeammat lukujonotaidot edellyttävät operationaalisen ajattelun tasoa säilyvyyksien osalta. Toisaalta tämä pitäisi luonnollisesti todeta opetustutkimuksen avulla.

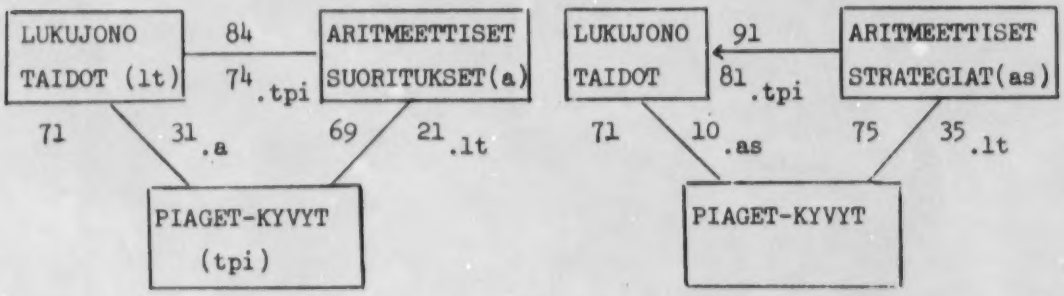
Jos tarkastellaan vielä missä määrin Piaget- ja IPC-kyvyt yhdessä kykenevät selittämään lukujonotaitoja, päädytään yleisesti ottaen vielä korkeampiin (yli 50 %) selitysosuuksiin. Parhaimmillaan päästään jopa 70 % tasolle; tämäkin tärkeän DOBY taidon kohdalla. Täten on ilmeistä, että kognitiivisilla kyvyillä on merkittävä osuus kehittyneempien lukujonotaitojen hankinnassa, jotka taas ovat läheisessä yhteydessä kehittyneempien aritmeettisten strategioiden kanssa. Tarvitaan vielä paljon tutkimusta ennen kuin tämä mielenkiintoinen ja tärkeä vyyhti todella selviää näin spesifillä tasolla. Toisaalta tehtävään E liittyvät mallit antavat jotain vaikkakin karkeaa tietoa edellä olevan vyyhdin selvittämiseksi.

Tehtävään E liittyen voidaan todeta eräitä mielenkiintoisia tuloksia. Ensinnäkin osoittautui, että lukujonotaitojen sekä

aritmeettisten suoritusten ja strategioiden korrelaatiot pysyivät korkeina, vaikka koulutulokkaiden ikäjärjestys sekä Piaget- ja IPC-kyvyt vakioitiin. "Puhdistetuiksi" korrelaatioiksi jäivät korkeat arvot 0.66*** sekä 0.75*** . Tämä viittaa siihen, että lukujonotaitoja kehittämällä on ehkä mahdollista vaikuttaa tiettyyn pisteeseen asti aritmeettisten kykyjen kehittymiseen. Toiseksi osoittautui, että myös kardinaalisten kykyjen (tarkan laskemisen taito, ekvivalenssin ja inekvivalenssin muodostus, progressiivinen summaus) yhteys aritmeettisiin suorituksiin ja strategioihin jää merkitseväksi, kun ikäjärjestys, IPC-kyky ja Piaget-kyky on vakioitu. Korrelaatiot ovat vakioinnin jälkeen 0.64*** sekä 0.51** . Tämä osoittaa, että kyseiset taidot ovat tärkeitä tekijöitä aritmeettisten suoritusten ja strategioiden omaksumisessa sekä kehittämisessä. Saattaa olla, että progressiivisen summauksen taito on yksi hyvä indikaattori pitkien toimintojen toteamisessa ja ohjaamisessa puolipitkiin toimintoihin. Puolipitkien toimintojen osalta on nimittäin tärkeää, että lapsi oppii ennakoimaan esimerkiksi COBP tai JOIP tyypissä ensimmäisen yhteenlaskettavan luettelun viimeistä lukusanaa. Tämä ennakointi saattaa mahdollistaa oivalluksen, että ensimmäisen yhteenlaskettavan alusta asti luettelu ei ole enää tarpeellista. Toisaalta tarkan laskemisen taito sekä numeerisesti ekvivalentin tai inekvivalentin tilanteen ymmärtäminen ovat luonnollisia perustaitoja, joiden kehittämiseen pitäisi heti koulun alkuvaiheessa kiinnittää huomiota. Kolmanneksi osoittautuu, että tässä työssä tutkitut mittaussuoritukset ja strategiat ovat suhteellisen erillisiä toimintoja lukujonotaidoista, aritmeettisista kyvyistä sekä kardinaalisista kyvyistä, kun Piaget-kyky, IPC-kyky ja ikäjärjestys on vakioitu. Toisin sanoen tässä työssä tutkitut mittauskyvyt ("autoratatehtävät"/Piaget et al 1960, "polkutehtävät"/Bailey 1974, Steffe 1971 ja "peittotehtävät"/Carpenter 1971, 1975) ovat lapsen mielessä suhteellisen riippumattomia lukujonotaidoista sekä kardinaalis-aritmeettisista kyvyistä. Tämä näkyi myös suoritetuista regressioanalyyseistä, joiden mukaan mittaussuoritusten parhaaksi ja ainoaksi merkitseväksi selittäjäksi tuli IPC-kykyihin liittyvä makromuuttuja. Selitysaste jäi kylläkin kovin vaatimattomaksi 17 %:ksi. Mittausstrategioiden parhaaksi ja ainoaksi selittäjäksi tuli Piaget-kykyihin liittyvä makromuuttuja. Selitysaste jäi tässäkin kovin matalaksi 27 %:ksi. Näin varsinkin, jos tarkastellaan

aritmeettisten suoritusten ja strategioiden selitysasteita mitattuna muilla kognitiokentän osa-alueiden makromuuttujilla. Selitysasteet ovat niinkin korkeita kuin 88 % ja 89 %. Parhaat selittäjät olivat odotetusti lukujonotaidot sekä toiseksi parhaana ja merkitsevänä selittäjänä kardinaaliset kyvyt.

Neljänneksi tarkastellaan miten ja missä määrin Piaget-kyvyt selittyvät muilla kognitiokentän makromuuttujilla. Kiintoisin on Piaget-kykyjen yhteys lukujonotaitoihin sekä aritmeettisiin kykyihin. Tarkastellaan näitä suhteita alla olevien "maagisten kolmioiden" avulla.



Kuvio IX 1. Piaget-kykyjen, lukujonotaitojen sekä aritmeettisten suoritusten ja strategioiden yhteydet (N=35)

Oikeanpuoleisen mallin perusteella Piaget-kykyjen ja lukujonotaitojen yhteydet näyttäisivät selittyvän aritmeettisten strategioiden kautta. Tämä on aiempien yksityiskohtaisempien analyysien mukaista. Olivathan Piaget-kyvyt hyvinkin selitysvoimaisia nimenomaan aritmeettisten strategioiden suhteen useimmassa tarkastellussa yhteen- ja vähennyslaskutyypissä. Toisaalta voidaan todeta, että lasten käyttämät aritmeettiset strategiat olivat sekä loogisesti että kokeellisesti kiinteässä yhteydessä kehittyneempien lukujonotaitojen kanssa. Täten ei ole ihme, että aritmeettisten strategioiden vakiointi pudotti lukujonotaitojen ja Piaget-kykyjen välisen selitysosuuden 50 %:sta 1 %:iin!

Selitettäessä Piaget-kykyjä suorituksiin perustuvilla makromuuttujilla sekä lasten ikäjärjestyksellä päästiin 57 % selitysasteeseen. Merkitsevät selittäjät olivat lukujonotaidot sekä ikäjärjestys. Mainittakoon, että ikäjärjestys korreloi tilastollisesti merkitsevästi ainoastaan Piaget-kykyihin liittyvän makromuuttujan

kanssa. Strategioihin perustuvilla makromuuttujilla oli selitysvoimaa 66 %. Parhaat ja ainoat merkitsevät selittäjät olivat aritmeettiset ja mittausstrategiat, mainitussa järjestyksessä. Mainittakoon, että IPC-kykyjen vakiointi aiheutti sen, että Piaget-kykyjen ja kardinaalisten kykyjen korrelaatio putosi selvästi alle kriittisen rajan (0.40 - 0.19). Vastaavaa ilmiötä ei havaittu Piaget-kykyjen suhteissa lukujonotaitoihin, aritmeettisiin suorituksiin ja strategioihin sekä mittausstrategioihin. IPC-kyvyistä "puhdistetut" korrelaatiot olivat vastaavasti 0.61^{***}, 0.59^{***}, 0.67^{***} sekä 0.41^{*}.

On toivottavaa ja oletettavaa, että tämän tutkimuksen tulokset ja paradigma "poikivat" jatkotutkimuksia, joissa päästään yhä tarkemmin selville oppimisen, kielen ja ajattelun välisistä kompleksisista suhteista. Lasten ajatteluprosessien ja strategioiden tutkimusparadigma ja sovellutusmahdollisuudet vaikuttavat siinä määrin hedelmällisiltä, että luulisi kiinnostuksen lisääntyvän tämänlaatuiseen tutkimusotteeseen. Toisaalta on selvää, että pelkkä kiinnostus ja myötätunto tämänlaatuista tutkimusotetta kohtaan ei enää riitä. Suomeen tarvitaan lisää nimenomaan matematiikan kasvatuksen tutkijoita ja tutkimusresursseja. Nämä olisi suunnattava ja koordinoitava siten, että myös täällä pysytään tiiviisti mukana matematiikan kasvatuksen kehityksessä ja ennen kaikkea kehittämisessä. Tällöin vältetään haitallisia muotivirtauksia ja pysytellään lujemmalla pohjalla kuin aiemmin on käynyt. Yksittäisten tutkijoiden voimat voitaisiin ja olisi syytä yhdistää samaan tapaan kuin matematiikan kasvatuksen tutkimuksen kärkimaassa USA:ssa. Nimenomaan pätevien tutkimusryhmien perustaminen näyttäisi olevan tehokas tapa vastata matematiikan kasvatuksen tutkimuskentän laajentumisen ja monimutkaistumisen haasteisiin.

ENGLISH SUMMARY

Mathematical thought processes and strategies: their relationship with cognitive structuring and information processing capacity.

This study investigated the interrelationship between the following areas of mathematics learning:

A. Piagetian "operations" and their associated levels of consciousness;
B. the individual's information processing capacity with relation to sequence, counting, and measurement number;
C. the mathematical thought processes and strategies associated with the individual's development of the number concept;
D. the thought processes and strategies involved in the individual's measurement abilities.

The study builds on recent research work on mathematics learning and cognitive psychology and on studies illuminating the Piagetian school's ideas of mathematico-logical thought development (Beth & Piaget 1966, Brainerd 1978, 1979, Carpenter et al 1981, 1982, Case 1980a, b, Fuson & Hall 1982, Hiebert 1981, Klahr & Wallace 1976, Leino 1981a, Neisser 1967, Piaget 1952, Piaget et al 1960). Soviet psychology and earlier studies by the writer also contributed to the construction of the research paradigm and choice of research angle (Galperin 1957, Galperin & Georgiev 1969, Keranto 1979, 1981, Vygotsky 1962).

The theoretical discussion examines the structuralism of Piaget's research into mathematico-logical thinking in the light of information processing theory. Models of the individual's schemes based on Piaget's algebraic structures are found in part to be remote from school experience and insufficiently refined to to give a detailed picture of mathematical problem-solving processes and strategies. In fact, this study suggests that Piaget's "operations" can better be thought of as "abilities", and the term "Piaget abilities" will be used here to refer to processes and strategies observable in connection with certain mathematico-logical problems rather than to Piaget's algebraic groupings.

The study also considers the significance of consciousness of processes in cognitive development. In the experimental section, consciousness of processes will be chosen as principle criterion as regards Piaget abilities. This is compared with Bruner's criterion, which requires only that the child's symbolic representation is activated and that the child can overcome optical illusions.

The theoretical discussion shows the need for a theoretical framework to explain the relatioship of pre-numerical abilities to information processing capacity and to numerical and measurement abilities. The main question to which the experimental section addresses itself are as follows:

1. How do Piaget abilities relate to the individual's performance on and strategies involved in the central (from a practical point of view) tasks of addition and subtraction?
2. What is the relationship of information processing capacity to Piaget abilities and to arithmetical and measurement performance and strategies?
3. How do sequence skills relate to performance on and strategies used in addition and subtraction tasks to Piaget abilities, and to information processing capacity?
4. Are there hierarchies of sequence skills, and how can these be put to use in basic mathematics teaching?
5. What are the dependency relationships of the various subsectors of the cognitive field under investigation on a macrolevel?

Method. The subjects were interviewed individually. Each child's performance and strategies used were recorded both in a written code and on tape. The measurements were carried out in the training school at the Tampere University Institute of Teacher Training in Hämeenlinna (25.8.82 - 15.10.82). All first-graders (N=35) took part in the measurements, their ages ranging between 6.8 and 7.8. Each child was interviewed four times, each interview lasting 35 - 45 minutes depending on the child's level of ability and type of test. To sustain motivation and avoid tiredness the tests included breaks for relaxation. The tests were conducted

throughout by the researcher. The order in which each child carried out the tests was: sequence skills - arithmetical addition and substraction abilities - information processing capacity - prenumerical operations and measurement abilities.

Measurement. The types of tasks used are outlined below, with the abbreviations used and the number of items given in parentheses.

Piaget abilities: transitive judgment (TR/4); (SUBS/3); functional seriation (SER/2); inclusion (IN/3-6); conservation of ascertained one-to-one correspondence (EJEC/4); number conservation under identity conditions (NC/2); and conservation of length under conditions of identity and equivalence (LC/3) (Cf. Brainerd 1978, 1979; Piaget 1952; Piaget et al 1960).

Information processing capacity: Enumeration Span when all numbers the subject must count up to are given in advance (ESP/10); Enumeration Span when numbers the subject must count up to are given one by one (ESP(O)/5); a modification of Case's CSP measure); Counting Span (CSP/3 ; Case's CSP measure); Measuring Span (MEASP/3; a modification of Case's CSP measure)(Case 1972, 1974, 1980a; Case et al 1979).

Sequence skills: A. Forward sequence: fluent and accurate enumeration (ENUM/1); "count" up from x (UP/5); "count" up to x (TO/2); "count" up from x to y (UPTO/3); "count" up from x by "N" (UPBY/6); "count" up from x by the same number m (SABY/5). B. Backward sequence: "count" down from x (DO/2); "count" down from y to x (DOTO/3); "count" down from y by "N" (DOBY/6). C. Relational skills: "number" after x (AF/3); "number" before x (BEF/3); "numbers" between x and y (BET/3); "N" bigger/smaller than x (BS/8). (Fuson & Hall 1982, Keranto 1981).

Arithmetical and cardinal abilities: Combine plus (COBP/3); Join plus (JOIP/3); Separate minus (SEPM/3); Join minus (JOIM/3); Reversible join minus (RJOIM/3); Combine minus (COBM/5); Compare (COMP/4); accurate counting (COUNT/2); cardinal principle (CARD/2); the formation of equivalence and inequivalence (EJE/3); progressive summation (PRS/3) (Carpenter et al 1982; Gelman and Gallistel 1978; Keranto 1979, 1981).

Measurement abilities: the "covering" of length and the inverse relation of measurement number and unit of measurement (COV/4); Piaget's subdividing a straight line, measured by "motion" along a "car track" (MOT/3); "pedalling" tasks or travel (TRAV/3); measurement technique tasks (MT/2) (Bailey 1974; Carpenter 1971, 1975; Hiebert 1981; Piaget et al 1060 pp. 128 - 149; Steffe 1971).

Scoring: Two systems were used, one based on correctness of performance and the other on the subject's consciousness of the process and strategies employed. These yielded characteristic sum variables for each task type. The variables based on performance and tne "qualitative" variables based on process and strategies proved to behave similarly in correlation and regression analyses carried out. However, it was noticeable that performance variables in respect of Piaget abilities did not have the same degree of explanatory power as the corresponding process variables. In other words the criterion that the subjects had to be able to explain the way they arrived at their answers had a significant effect on the explanatory power of Piaget variables in relation to other variables in the cognitive field. This was understandable in view of the fact that there was little variance on the TR, SUBS, IN and SER variables on performance scoring, since success on these tasks was almost 100 %. By demanding that subjects should explain their answers, however, it was possible to score 0, 1 or 2, where 2 represents a level where the calculation process is correct and the explanation adequate. The results of the study, to which we shall now turn, lend support to the use of Piaget's set of criteria in the definition of operational thinking.

Results. As regards question 1, Piaget abilities as assessed on process criteria in particular, appear to have predictive power with respect to arithmetical performance and especially strategies and thus to be closely connected with these. Piaget abilities assessed on performance had a predictive power 10 - 30 % lower; hereafter it will be to process measurement that reference is made when Piaget abilities are mentioned. The predictive power of Piaget abilities in respect of arithmetical strategies varied between 22 % (RJOIM/TR) and 61 % (COMP/SUBS and EJEC); and in

respect of arithmetical performance between 12 % (JOIM/TR) and 56 % (COMP/EJEC and LC). One general observation was that performance on tasks closely associated with addition, COBP and JOIP were poorly explained, whereas the more difficult types COBM and COMP were better explained by Piaget abilities. This suggests that performance on the simplest tasks is not so dependent on the level of development of Piaget abilities, whereas performance on tasks involving quantitative comparison of sets is. This can be explained in terms of the development of strategies, in which Piaget abilities would appear to play a significant role.

In an attempt to throw light on question 2, four information processing capacity (IPC) measures were tried out as described earlier. These measures were designed so as to take account of earlier studies and the most central issues in this study, with Case's research (1972, 1980a) as a point of departure. The most reliable of these measures proved to be the ESP measure, with a reliability coefficient of 0.79. This measure was similar to the BLS measure used by Case but was regarded as more in correspondence with the pressures of real-time processing the child has to cope with in keeping various things in mind simultaneously on sequence and arithmetic tasks (cf. Case 1972). The span values of beginning schoolchildren were found to be typically 2 or 3, which correspond to those reported by Case (1972) and Pascual-Leone (1970). On the other hand it was observed that span values depended a great deal on how large the numbers were in each task and particularly on the specific content. The degree of operational automacy was observable when span values on tasks involving sequence contents were compared with those on tasks relating to counting and measurement contents; the latter were considerably lower. These differences were further noticeable in the examination of how far Piaget abilities, sequence skills and arithmetic and measurement abilities can be explained by IPC abilities.

The following nine variables were formed relating to IPC abilities: ESP, ESP(S), ESP(O), CSP, MEASP, $ESP_m(S)$, $ESP_m(O)$, CSP_m and $MEASP_m$. Variables ESP(S) to MEASP refer to mode performance on each test, and those with sub-index $_m$ to maximum performance. The ESP(S) variable is obtained from the ESP test, whilst ESP is the sum variable of the items in this test; $0 \leq$ Range (ESP) ≤ 10. As regards regression models, only those were chosen in which all variables increased the predictive power by at least 5 %. Here it

may be noted that all t-tests used in the study were consistent with the regression models and do not add much to the present discussion; they will not therefore be treated any further in this summary.

The predictive power of IPC abilities in relation to arithmetic strategies varied between 13 % (SEPM/ESP) and 46 % (COBM/ESP and CSP_m), and in relation to arithmetic performance slightly lower at between 14 % (SEPM/ESP) and 40 % (COBM/ESP). A different picture emerged, however, as regards the relation of IPC abilities to measurement abilities. Here the best predictors were the MEASP and CSP variables. Levels of predictive power ranged from 12 % ($MT/ESP_m(S)$) to 40 % (MOT/CSP, ESP(O) and MEASP).

A general conclusion to be drawn would seem to be that IPC abilities are closely tied to specific contents, and that there is therefore a need to develop content-specific IPC measures further before the real significance of span values to the learning of particular contents can be seen.

Questions 3 and 4 are closely enough related to be treated here together as a whole. Some of the problem areas involved have been dealt with in the above presentation, too. Sequence skills together with arithmetic processes and strategies in addition and subtraction tasks formed the central core of this study. The choice of sequence skills was based on previous research by Fuson and Hall (1982) and by the present writer (Keranto 1981).

The development of hierarchies of sequence skills was investigated in parts using Guttman's scale (Guttman 1944; White & Saltz 1957). "Complete" hierarchies were obtained in particular in the case of forward and relational skills. The best hierarchy in the 1 - 10 range proved to be UP - TO - UPTO - UPBY (CR = 0.96, MMR = 0.82 and PPR = 0.78). In the 10 - 20 range the best and literally complete hierarchy was AF - BEF - BET (CR = 1.00, MMR = 0.76 and PPR = 1.00). The formation of hierarchies was complicated by the developmental relations of UPTO and UPBY skills. Similarly, DOTO and DOBY skills "spoilt" the hierarchy of backward sequence skills in the 1 - 10 range. However, in the 10 - 20 range the following

hierarchy was obtained: DOBY"2" - DO - DOBY"5" - DOTO - DOBY"8" (CR = 0.92, MMR = 0.66 and PPR = 0.76). The decisive factor here, in other words, was the number of digits by which the subjects had to count back from a given number. The foregoing hierarchies suggest a possible systematic development of sequence skills. This is an important point, since sequence skills prove to be sound predictors of arithmetic performance and strategies, as both the logical analysis carried out and the experimental results indicated.

The predictive power of sequence skills in relation to arithmetic performance ranged between 22 % (JOIP/SABY) and 86 % (RJOIM/BEF, UP, TO, DO); the COBM and JOIM variables, too, were high predictors at 72 % (COBM/DOBY) and 73 % (JOIM/BEF, AF, ENUM). In relation to arithmetic strategies, predictive values were even higher, ranging from 45 % (COBP/SABY and BET) to 84 % (COBM/DOBY, ENUM, SABY, UPTO). The best predictor as regards strategies on problems of the COBP, JOIP and SEPM types was the SABY variable, i.e. the ability to coup up by a given number, the figures being 45 %, 57 % (as also with UPBY) and 49 % respectively. The best predictor of JOIM and RJOIM strategies was the BEF variable, i.e. the ability to state a number's immediate predecessor, with values at 68 % (JOIM/BEF, UP, UPTO) and 78 % (RJOIM/BEF, SABY, AF). Finally, the best predictor of COMP abilities was the BS variable (59 %), which is logical enough in that COMP and BS problems correspond in their deep structure.

Piaget abilities as predictors of sequence skills generally had values below 50 %, but in the case of the important BEF, UPBY and DOBY skills there were figures of 58 % (BEF/SER, LC, IN and NC), 61 % (UPBY/LC and NC) and 62 % (DOBY/LC, NC and SUBS). It was thus conservation variables which proved to be the best predictors of UPBY and DOBY skills, and this indicates that these more demanding sequence skills are bound up with the individual's level of operational development.

When Piaget abilities and IPC abilities taken together were assessed as predictors of sequence skills, values of over 50 % were generally obtained, the highest being 70 % (DOBY/LC, NC, ESP and SUBS). It is thus evident that cognitive abilities (Piaget and IPC) play a significant role in the acquisition of sequence skills,

which are in turn closely connected with arithmetic strategies. The route by which Piaget abilities influence sequence skills emergies at the macro-level in the following discussion, which also throws light on other dependency relations in the cognitive field.

To answer question 5, sum variables were formed from the performance and process variables for each sub-sector of the cognitive field under investigation. The following "triangle" reveals the macro-level dependency relations between Piaget abilities, sequence skills, and arithmetic abilities:

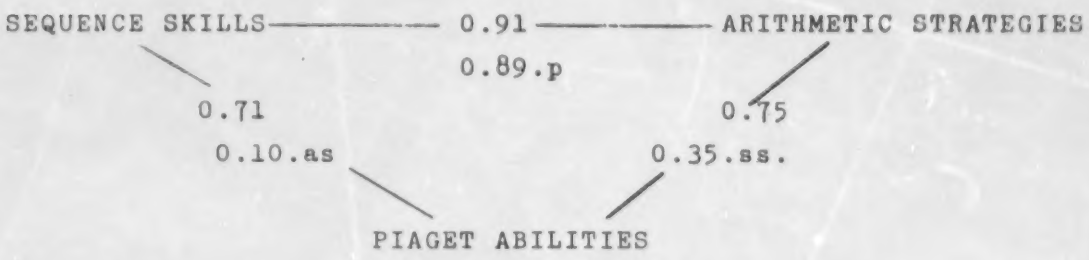


Figure 1. A model of the dependency relationships between sequence skills, arithmetic strategies and Piaget abilities (N=35); .as, .ss and .p indicate partial correlations where arithmetic strategies, sequence skills and Piaget abilities constant respectively

The relationship between Piaget abilities and sequence skills is explained by the arithmetic strategies used. This is in keeping with the earlier detailed analyses: Piaget abilities were found to be very good predictors precisely of arithmetic strategies. Again, it was stated that both on logical grounds and experimentally arithmetic strategies are closely related with the more developed sequence skills, so that it is not surprising that on the macro-level, too, the variance shared by sequence skills and Piaget abilities falls from 50 % to 1 % when arithmetic strategies are constant.

The following figure presents a larger model of the cognitive field investigated:

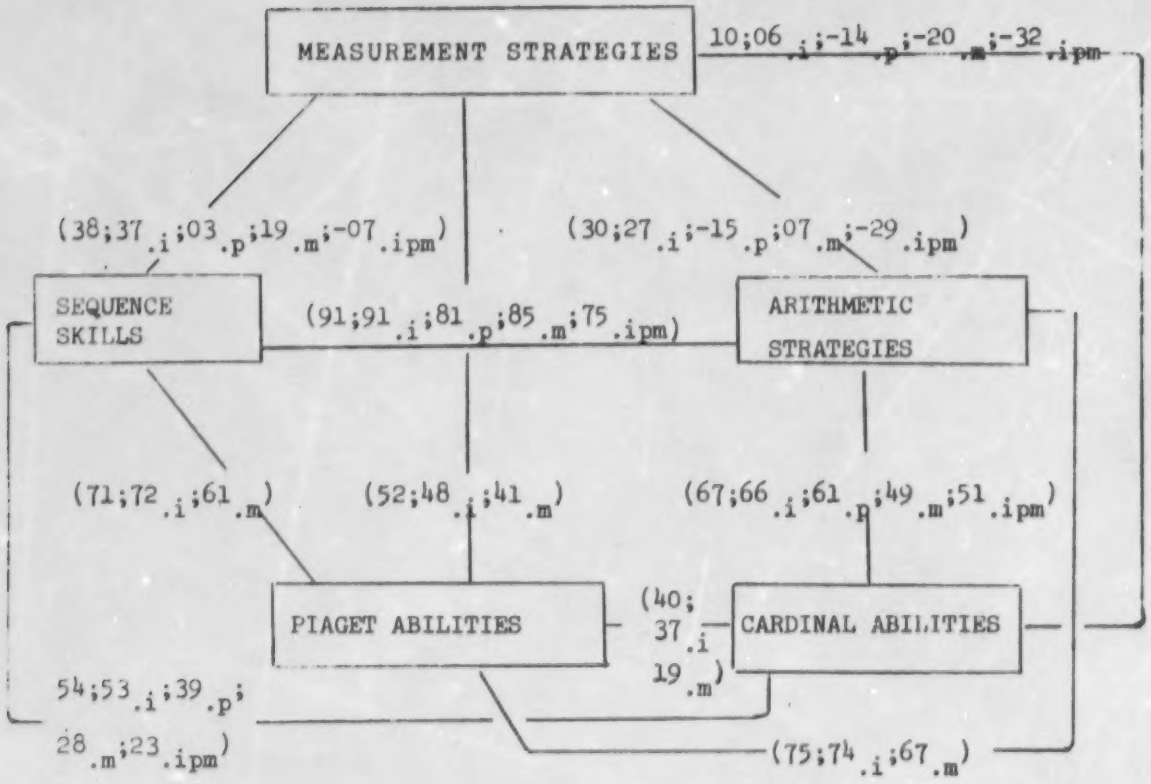


Figure 2. The dependency relationships between sub-sectors of the cognitive field studied (N=35); .i, .p, .m and .ipm indicate partial correlations where order of age, Piaget abilities and memory (IPC) are constants separately and all together respectively.

The highest correlation was that between sequence skills and arithmetic strategies where cognitive abilities were constant, which reflects the close connection found on the specific level. The correlation of Piaget abilities with sequence skills and arithmetic strategies remains high even when memory is taken as constant. Their correlation with measurement strategies, too, remains at a statistically significant level with memory constant. Sequence skills appear to be connected to measurement strategies and cardinal abilities through cognitive abilities, while cardinal abilities connect to Piaget abilities via memory. It can be observed that the measurement abilities studied are relatively independent of and thus operationally different from the other parts of the cognitive field with the exception of Piaget abilities. The results charted in the above diagram were also reflected in regression analyses performed between macro-variables. The most

significant predictors of arithmetic strategies were, in accordance with the model, sequence skills, cardinal abilities and Piaget abilities in that order. The level of predictive power was as high as 89 %. On the basis of this it is reasonable to speculate that the factors determining the development of arithmetic strategies are largely localised. As expected, the only significant predictor of sequence skills was arithmetic strategies, the predictive power high at 83 %. The best predictors of Piaget abilities were arithmetic strategies and measurement strategies (66 %); of cardinal abilities, arithmetic strategies (45 %); and of measurement strategies, Piaget abilities (27 %). All these results are consistent with those recorded on the specific level.

KIRJALLISUUS

Aebli, H. 1963. Über die geistige Entwicklung des Kindes. Stuttgart: Klett

Bailey, T.G. 1974. Linear measurement in the elementary school. Arithmetic Teacher, 21, 520 - 525

Baylor, G., Gascon, J., Lemoyne, G. & Pothier, N. 1973. An information processing model of some seriation tasks. Canadian Psychologist, 14, 167 - 196

Beth, E.W. & Piaget, J. 1966. Mathematical epistemology and psychology. Dordrecht, Holland: Reidel

Biggs, J.B. 1980. DevelopmentalProcesses and Learning Outcomes. In J.R. Kirby & Biggs, J.B. (Eds), Cognition, Development and Instruction. N.Y.: Academic Press

Braine, M.D.S. 1962. Piaget on reasoning: A methodological critique and alternative proposals. In W. Kessen & Kuhlman, C. (Eds), Thought in young child. Monographs of the Society for Research in Child Development 27

Brainerd, C.J. 1973. Order of acquisition of transitivity, conservation, and class inclusion of length and weight. Developmental Psychology 8: 105 - 116

_____. 1974. Training and transfer of transitivity, conservation, and class inclusion of lenght. Child Development 45: 324 - 334

_____. 1978. Piaget's Theory of Intelligence. New Jersey: Prentice-Hall

_____. 1979. The Origins of the Number Concept. N.Y.: Praeger

Brainerd, C.J. & Brainerd, S.H. 1972. Order of acquisition of number and liquid quantity conservation. Child Development 43: 1401 - 1405

Brainerd, C.J. & Fraser, M. 1974. A further test of the ordinal theory of number development. Journal of Genetic Psychology 125: 141 - 152

Brainerd, C.J. & Hooper, F.H. 1975. A methodological analysis of developmental studies of identity conservation and equivalence conservation. Psychological Bulletin 82: 725 - 737

Bruner, J., Goodnow, J. & Austin, G. 1956. Study of Thinking. N.Y.: Wiley

Bruner, J. 1964. The course of cognitive growth. American Psychologist 19: 1 - 15

Bryant, P.E. 1972. The understanding of invariance by very young children. Can. J. Psychol., 26: 78 - 96

Bryant, P.E. & Trabasso, T. 1971. Transitive Inferences and Memory in young children. Nature 232: 456 - 458

Carpenter, T.P. 1971. The performance of first grade students on a non-standard set of measurement tasks. Tech. Rep. no. 211. The Wisconsin Research and Development Center for Cognitive Learning: The University of Wisconsin

_____. 1975. Measurement concepts of first- and second-grade students. Journal for Research in Mathematics Education 6: 3 - 13

_____. 1976. Analysis and synthesis of existing research on measurement. In R.A. Lesh (Ed.), Number and measurement. Columbus, Ohio: ERIC

Carpenter, T.P., Corbitt, M.K., Kepner, H.S., Lindquist, M.M. & Reys, R.E. 1981. National assessment. In E. Fennema (Ed.), Mathematics Education Research: Implications for the 80's. Association for Supervision and Curriculum Development: Alexandria, Va

Carpenter, T.P., Hiebert, J. & Moser, J. 1981. The effect of problem structure on first grader's initial solution procedures for simple addition and subtraction problems. Journal for Research in Mathematics Education 12: 27 - 39

_____. 1982. Cognitive development and children's solutions to verbal arithmetic problems. Journal for Research in Mathematics Education 13: 83 - 98

Carpenter, T.P. & Lewis, R. 1976. The development of the concept of a standard unit of measure in young children. Journal for Research in Mathematics Education 7: 53 - 64

Case, R. 1972. Validation of a neo-Piagetian mental capacity construct. Journal of Experimental Child Psychology 14: 287 - 302

_____. 1974. Structures and strictures, some functional limitations on the course of cognitive growth. Cognitive Psychology 6: 544 - 573

_____. 1977. Responsiveness to conservation training as a function of induced subjective uncertainty, M-space and cognitive style. Canadian Journal of Behavioral Science 9: 12 - 28

_____. 1980. The underlying mechanism of intellectual development. In J.R. Kirby & Biggs, J.B. (Eds), Cognition, Development and Instruction. N.Y.: Academic Press

_____. 1980(b). Implications of neo-Piagetian theory for improving the Design of Instruction. In J.R. Kirby & Biggs, J.B. (Eds), Cognition, Development and Instruction. N.Y.: Academic Press

Case, R. & Globerson, T. 1974. Field independence and central computing space. Child Development 45: 772 - 778

Case, R., Kurland, M., Daneman, M. & Emanuel, P. 1979. Operational efficiency and growth of M-space. Paper presented at the biennal meeting of the Society for Research in Child Development, San Fransisco

Collis, K.F. 1975. A study of concrete and formal operations in school mathematics: A Piagetian viewpoint. Victoria, Australia: Australian Council of Educational Research

Copeland, R.W. 1979. How children learn mathematics. N.Y.: Macmillan

Davidov, V.V. & Andronov, V.P. 1979. Psychological conditions of the origination of ideal actions. English translation: Wingspread Conference, Racine, Wisconsin

Elkind, D. 1967. Piaget's conservation Problems. Child Development 38: 15 - 27

Elkind, D. & Schoenfeld, E. 1972. Identity and equivalence conservation at two age levels. Developmental Psychology 6: 529 - 533

Fuson, K. 1981. The Counting -On Solution Procedure: Analysis and Empirical Results: Wingspread Conference, Wisconsin 1979. To appear in T. Romberg, T. Carpenter & J. Moser (Eds), Addition and Subtraction: A Developmental Perspective. Expected 1981.

Fuson, K. & Hall, J.W. 1982. The Acquisition of Early Number Word Meanings: A Conceptual Analysis and Review. In H.P. Ginsburg, (Ed), Children's Mathematical Thinking. N.Y.: Academic Press

Fuson, K., Richards, J. & Briars. D.J. 1982.The acquisition and elaboration of number word sequence. In C. Brainerd (Ed), Progress in Cognitive Development. Children's Logical and Mathematical Cognition (Vol 1). N.Y.: Springer-Verlag

Flavell, J.H. 1963. The development psychology of Jean Piaget. Toronto, London, Melbourne: Van Nostrand

Freudenthal, H. 1973. Mathematics as an Educational Task. Dordrecht, Holland: Reidel

Galperin, P.J. 1957. An experimental study in the formation of mental actions. Psychologie in Soviet Union; ed. B. Simon, London: Routledge and Kegan Paul: 213 - 225

Galperin, P.J. 1979. Johdatus psykologiaan. Pori: Kansankulttuuri

Galperin, P.J. & Georgiev, L.S. 1969. The formation of elementary mathematical notions. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds), Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics (Vol 1). Chicago: The University of Chicago

Gelman, R. 1972. The nature and development of early number concepts. In H.W. Reese (Ed), Advances in child development (Vol 7), N.Y.: 116 - 165

Gelman, R. & Gallistel, C.R. 1978. The child's understanding of number. Cambridge, Ma: Harvard University Press

Gelman, R. & Tucker, M.F. 1975. Further Investigations of young child's conception of number. Child Development 46: 167 - 175

Ginsburg, H. 1977. Children's Arithmetic: The Learning Process. N.Y.: Van Nostrand

Goldin, G.A. & McClintock, C.E. (Eds). 1980. Task variables in mathematical problem solving. Ohio State University: ERIC

Guttman, L. 1944. A Basis for scaling qualitative data. Amer. Sociol. Rev. 9: 139 - 150

Halford, G.S. 1970. A theory of the acquisition of conservation. Psychological Review 77: 302 - 332

_____. 1975. Children's ability to interpret transformations of a quantity: An operational system for judging combinations of transformations. Canadian Journal of Psychology 29. 124 - 141

_____. 1978. An approach to the definition of cognitive developmental stages in school mathematics. British Journal of Educational Psychology 48: 298 - 314

_____. 1980. Toward a Redefinition of Cognitive Developmental Stages. In J.R. Kirby & Biggs, J.B. (Eds), Cognition, Development and Instruction. N.Y.: Academic Press

Hiebert, J. 1979. The effect of cognitive development of first-grade children's ability to learn linear measurement concepts (Tech Rep No 506), Wisconsin: Wisconsin Research and Development Center for Individualized Schooling

_____. 1981. Cognitive development and learning linear measurement. Journal for Research in Mathematics Education 12: 197 - 211

Inhelder, B. 1972. Information processing tendencies in recent experiments in cognitive learning. In S. Farnham-Diggory (Ed), Information processing in children. N.Y.: Academic Press

Inhelder, B. & Piaget, J. 1964. The early growth of logic in the child. London: Routledge & Kegan Paul

Inhelder, B. & Sinclair, H. 1969. Learning cognitive structures. In P.H. Mussen, J. Langer & M. Covington (Eds), Trends and issues in developmental psychology. N.Y.: Holt, Rinehart & Winston

Keranto, T. 1978. Esikouluikäisen lapsen lukukäsitteen kehitysasteesta ja laskuvalmiuksista. Hämeenlinna. Tampereen yliopiston Hämeenlinnan OKL:n julkaisuja, No. 1

Keranto, T. 1979. Lapsen lukukäsitteen kehittymisen ja kehittämisen matemaattisdidaktinen näkökulma. Hämeenlinna. Tampereen yliopiston Hämeenlinnan OKL:n julkaisuja, No. 2

_____. 1980. The development and aided development of the child's conception of number: a didactic view. Paper presented in Forth International Congress on Mathematical Education, Berkeley, California

_____. 1981. Lukukäsitteen kehittyminen ja kehittäminen: matemaattis-loogiset perusteet ja luvun kognitiivinen rakentuminen. English summary: The acquisition and aided development of the concept of number. Mathematical-logical principles and cognitive structuring of number. Acta Universitatis Tamperensis. ser. A vol. 125. University of Tampere

_____. 1982. Lapsen matemaattisten ajatteluprosessien ja tiedollisen rakenteen kehitys. Julkaisussa Kognitiiviset prosessit ja matematiikan opetus. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksessa 8. - 9.2.1982 järjestetyn matematiikan opetuksen tutkijaseminaarin raportti. Toimittaja P. Kupari: KTL. Selosteita ja Tiedotteita 199

Klahr, D. & Wallace, J.G. 1976. Cognitive Development. An Information-Processing View. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates

Klausmeier, H. & Goodwin, W. 1969. Learning and human abilities. N.Y.: Harper

Kosminsky, C. & Hall, A.E. 1973. The developmental relationship between identity and equivalence conservation. Journal of Experimental Child Psychology 15: 419 - 424

Leino, A-L.& Leino, J. 1982. Oppimisvaikeudet kognitiivisten prosessien näkökulmasta. Helsinki. Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitoksen tutkimuksia N:o 97

Leino, J. 1977. Matemaattisten kykyjen ja ajatteluprosessien kehittyminen kouluopetuksessa. 1. Matemaattiset kyvyt ja asenteet. Helsinki. Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitoksen tutkimuksia N:o 60

_____. 1978. Matemaattisten kykyjen ja ajatteluprosessien kehittäminen kouluopetuksessa. 2. Matemaattinen ajattelu- ja suoritusprosessi. Helsinki. Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitoksen tutkimuksia N:o 66

_____. 1981(a). Psychometric Test Theory and Cognitive Processes: A Theoretical Scrutiny and Empirical Research. Research Bulletin No. 57. Institute of Education, University of Helsinki

_____. 1981(b) Informaation prosessointi-malli opetuksen näkökulmasta. Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja 1: 67 - 70

Leino, J. 1982(a) Kognitiivisten prosessien tutkimus matematiikan opetuksessa ulkomailla. Julkaisussa Kognitiiviset prosessit ja matematiikan opetus. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksessa 8. - 9.2.1982 järjestetyn matematiikan opetuksen tutkijaseminaarin raportti. Toimittaja P. Kupari. KTL:n Selosteita ja Tiedotteita 199

_____. 1982(b) Oppimistyylit ja luonnontieteiden opetus. Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja 2: 173 - 175

Magne, O. 1978. The psychologie of remedial mathematics. Didakometry No. 59. Department of Educational and Psychological Research, School of Education Malmö, Sweden

_____. 1980. Matematik inlärningen i grundskolan. Pedagogiska Skrifter. Nummer 261: Sveriges lärarförbund

Malinen, P. 1978. Alkuopetuksen matematiikka. Jyväskylä. Opettajankoulutuslaitoksen opetusmonisteita ja selosteita. Numero 2: Jyväskylän yliopisto

Moynahan, E. & Glick, J. 1972. Relation between identity and equivalence conservation within four conceptual domains. Developmental Psychology 6: 247 - 251

Neisser, U. 1967. Cognitive psychology. N.Y.: Appleton-Century-Crofts

Newell, A. 1973. Production systems: Models of control structures. In W.G. Chase (Ed), Visual information processing. N.Y.: Academic Press

Newell, A. & Simon, H.A. 1972. Human problem solving. New Jersey: Prentice-Hall

Noelting, G. 1980(a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 1. Differentiation of stages. Educational Studies in Mathematics 11: 217 - 253

_____. 1980(b). The development of proportional reasoning and ratio concept. Part 2. Problem -structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. Educational Studies in Mathematics 11: 331 - 363

Northman, J. & Gruen, G. 1970. Relationship between identity and equivalence conservation. Developmental Psychology 2: 311

Osborne, A.R. 1976. The Mathematical and Psychological Foundations of Measure. In R.A. Lesh (Ed), Number and measurement. Columbus, Ohio: ERIC

Piaget, J. 1941. Le méchanisme du développement mental et les lois du groupement des opérations. Esquisse d'une théorie opératoire de l'intelligence. Archives de Psychologie 28: 215 - 285

_____. 1952. The Child's Conception of Number. N.Y.: Humanities Press

Piaget, J. 1956. Les stades du développement intellectuel de l'enfant et de l'adolescent. In Osterrieth et al, Le problème des stades en psychologie de l'enfant. Paris, 1956: 27 - 117

_____. 1960. The general problems of psychobiological development in children. In J.M. Tanner & B. Inhelder, Discussions on child development, Vol. 4. London: Tavistock

_____. 1971. Structuralism. London: Routledge & Kegan Paul

_____. 1976. The grasp of consciousness. Action and concept in the young child. Cambridge, Ma: Harvard University Press

Piaget, J. & Inhelder, B. 1941. Le Développement des quantités chez l'enfant. Neuchatel: Delachaux et Niestlé

_____. 1969. The psychology of the child. N.Y.: Basic Books

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. 1960. The child's conception of geometry. N.Y.: Basic Books

Pascual-Leone, J. 1970. A mathematical model for transition rule in Piaget's developmental stages. Acta Psychologica 32: 301 - 345

Pascual-Leone, J. & Smith, J. 1969. The Encoding and Decoding of Symbols by Children: A New Experimental Paradigm and a Neo-Piagetian Model. Journal of Experimental Child Psychology 8: 328 - 355

Puro, J. 1972. Matematiikan oppimisvaikeudet kokeiluperuskoulujen I - III luokilla. Jyväskylä. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisuja 163

Schaeffer, B., Eggleston, V.H. & Scott, J.L. 1974. Number development in young children. Cognitive Psychology 6: 357 - 379

Siegel, L.S. 1971(a). The sequence of development of certain number concepts in preschool children. Developmental Psychology 5: 357 - 361

_____. 1971(b). The development of certain number concepts. Developmental Psychology 5: 362 - 363

Siegel, S. 1958. Nonparametric statistics for the behavioral sciences. N.Y.: Mc Graw Hill

Siegel, L.S. & Brainerd, C.J. 1978. Alternatives to Piaget. N.Y.: Academic Press

Smedslund, J. 1963. Development of concrete transitivity of length in children. Child Development 34: 389 - 405

Steffe, L.P. 1971. Thinking about measurement. The Arithmetic Teacher 17: 332 - 338

Steiner, G. 1973. Mathematik als Denkerziehung. Stuttgart: Klett

Uzgiris, I.C. 1964. Situational gerality of conservation, Child Development 35: 831 - 841

Vygotsky, L.V. 1962. Thought and Language. The Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts: M.I.T. Press

White, W. & Saltz, E. 1957. Measurement of reproducibility. Psychological Bulletin 54,2: 81 - 99

Winer, G.A. & Kronberg, D.D. 1974. Children's responses to verbally and pictorially presented class-inclusion items and to a task of number conservation. Journal of Genetic Psychology 125: 141 , 152

Wohlwill, J.F. 1968. Responses to class-inclusion questions with verbally and pictorially presented items. Child Development 39: 449 - 465

Liite III 1. Piaget-kykyjen mittari

TR1. Kolme palikkaa (Cuisenaire) siten, että A < B ja B < C. Johtopäätös A? C, missä ? viittaa kysymykseen pidempi, yhtäpitkä vai lyhyempi.

TR2. Kuten edellä paitsi nyt ekvivalenssirelaatio " = ".

TR3. Nyt A < B ja B > C. Johtopäätös A ?? C, missä ?? viittaa kysymykseen, "mitä voit sanoa palikoiden A ja C keskinäisestä pituudesta?".

TR4. Kolme päällisin puolin samannäköistä ja eripainoista laatikkoa. Muuten sama kuin TR1.

SUBS1. Muuten sama kuin TR4 paitsi premissit ovat nyt A=B ja B<C.

SUBS2. Muuten sama kuin TR1 paitsi premissit ovat nyt A=B ja B<C.

SUBS3. Muuten sama kuin TR1 paitsi premissit ovat nyt A>B ja B=C.

SER1. Aseta palikat (Cuisenaire) pienimmästä suurimpaan (8 palikkaa).

SER2. Sijoita tämä palikka (6.) oikealle kohdalle sarjassasi.

TIN1. Tässä on 8 punaista ja 10 keltaista "karkkia" (saa laskea myös itse). Kummassa tapauksessa saat enemmän syömistä? Otat keltaiset "karkit".. Otat kaikki "karkit".

TIN2. Kumpia tässä on enemmän? Keltaisia karkkeja vaiko karkkeja kaikkiaan?

TIN3. Kumpia tässä on vähemmän? Punaisia karkkeja vaiko karkkeja kaikkiaan?

TIN4. Tässä on 9 vihreää karkkia ("mintut") ja 9 ruskeaa ("suklaat") "karkkia". Kummassa tapauksessa saat vähemmän syömistä? Otat vihreät "karkit". Otat kaikki "karkit".

TIN5. Kumpia tässä on vähemmän? Vihreitä "karkkeja" vai "karkkeja" kaikkiaan?

TIN6. Kumpia tässä on enemmän? Ruskeita "karkkeja" vai "karkkeja" kaikkiaan?

EC1. Pöydälle on asetettu yksi-yksi-vastaavuuteen 8 sinistä ja 8 punaista palikkaa (UNIFIX). Lapsi toteaa, että palikoita on yhtämonta. Toiset levitetään. Onko täällä vielä yhtämonta, enemmän vai vähemmän kuin täällä?

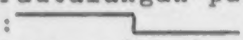
EC2. Muuten sama kuin edellä paitsi lukumäärät nyt 14 ja 14.

EC3. Muuten sama kuin edellä paitsi ryhmittely "9+5" ja "5+9".

JEC. Muuten sama kuin EC2 paitsi että nyt toisessa 15 ja toisessa 13.

NC1. Lapsi laskee kuinka monta "karkkia" on pöydällä (UNIFIX; 18 palikkaa). "Karkit" ryhmitellään "6+6+6"-muotoon. Kuinka monta "karkkia" tässä nyt on?

NC2. "Karkit" ryhmitellään "8+10"-muotoon. Kuinka monta "karkkia" tässä nyt on?

ILC. Lapselle esitetään rautalangan pätkä (n. 20 cm). Lanka taivutetaan muotoon:  . Onko lanka nyt yhtäpitkä, pidempi vai lyhyempi kuin suorana?

ILMC. Lapsi saa mitata viivaimella langan pituuden. Jos ei osaa mitata ollenkaan kerrotaan, että lanka on 20 cm. Lanka taivutetaan. Kuinka pitkä lanka nyt on?

ELC. Muuten sama kuin osio ILC paitsi nyt alkutilanteessa todetaan, että kaksi suoraa rautalankaa ovat yhtäpitkiä. Sitten toista taivutetaan samoin kuin edellä ja vastaava kysymys.

Liite III 2 Tiedostamiseen perustavien Piaget-kyky-osioiden korrelaatiomatriisi (N=35)

	TR2	TR3	TR4	SUBS1	SUBS2	SUBS3	SER1	SER2	IN4	IN5	IN6	EC1	EC2	EC3	JEC	NC1	NC2	ILC	ELC
TR1	50	19	44	67	57	68	10	37	21	07	28	35	55	42	40	11	01	22	24
TR2		65	57	57	77	75	50	54	55	43	54	43	53	57	47	26	34	44	45
TR3			31	31	54	43	30	24	27	28	25	39	33	39	27	33	31	29	31
TR4				77	74	60	19	30	51	11	27	26	26	26	25	18	33	41	44
SUBS1					74	71	19	30	37	11	27	39	41	39	39	18	23	58	56
SUBS2						84	31	40	39	30	43	39	44	47	30	16	27	47	48
SUBS3							25	34	32	23	35	19	36	38	23	01	10	27	29
SER1								57	05	62	65	20	26	20	22	46	52	09	08
SER2.									22	49	66	33	38	33	35	11	28	34	34
IN4										24	41	27	27	36	39	16	23	51	50
IN5											76	13	22	23	17	52	61	28	29
IN6												32	40	44	35	48	55	28	29
EC1													84	80	84	41	39	55	56
EC2														88	88	38	31	50	50
EC3															76	35	20	50	51
JEC																42	38	55	52
NC1																	83	39	40
NC2																		22	23
ILC																			98

Liite IV 1. IPC-kykyjen mittarit

Tässä testissä yritämme päästä selville kuinka hyvin muistat asioita.

ESP(O)-mittari
Insktruktio: "Laske" lukuun 4 asti ja paina viimeksi sanomasi luku mieleen. Laske nyt lukuun 5 asti. Mihin lukuihin olet tähän mennessä laskenut? Laske vielä lukuun 3 asti. Mihin lukuihin olet nyt laskenut? Seuraavissa tehtävissä menettelemme kuten harjoitustehtävässä. Siihen asti jatketaan aina yhtä tehtävää kunnes et enää osaa palauttaa laskettuja lukuja. Samoin käy, jos teet laskemisessa useita virheitä. Kun yksi tehtävä on tehty ei sen tehtävän lukuja tarvitse enää muistaa.
1. 23--7--15--8--17--14 (jos sujuvan luettelun alue on n asti, niin x > n pois)
2. 11--22--12--5--20--16
3. 13--24--6--18--9--19
4. 15--20--14--7--5--16
5. 12--23--19--17--9--13

ESP(S)-mittari
Seuraavissa tehtävissä saat kaikki muistettavat luvut etukäteen. Tehtäväsi on "laskea" jokaiseen annetuista luvuista siinä järjestyksessä kuin ne sinulle sanon. Esimerkiksi annan luvut 4 ja 6. Laske ensin 4:ään ja sitten 6:een.
1) 18 ja 11 2) 12 ja 17 3) 9 ja 16 4) 15 ja 8 5) 9, 14 ja 5
6) 8, 10 ja 12 7) 8, 17 ja 13 8) 11, 9 ja 7 9) 7, 5, 18 ja 14
10) 6, 9, 12 ja 15

CSP-mittari
Annan sinulle kortin, jonka punaisten "pallojen" lukumäärän lasket yksitellen ääneen. Osoita aina sormella kohtaa jossa olet menossa. Paina lukumäärä mieleesi. Nyt saat uuden kortin, jonka punaisten pallojen lukumäärän (5 "palloa") painat mieleesi. Mitkä lukumäärät olet tahän mennessä saanut? (4 ja 5). Nyt saat kolmannen kortin. Mitkä kolme lukumäärää sait? (4, 5 ja 3).
1. 7--23--15--9--14--17 (jos luettelualue n asti, niin pois x > n)
2. 22--11--5--20--12--16
3. 6--8--10--12--14--16

MEASP-mittari
Seuraavat tehtävät ovat muuten samanlaisia kuin edelliset laskemistehtävät paitsi että nyt mittaat. Tutkit tämän mittakepin avulla (3 cm) kuinka monta tällaista menee tähän isoon palaan. Harjoitellaan ensin tätä. Liuskat, joihin menee 4, 5 ja 2 pikkuliuskaa. Mitattaviin liuskoihin on merkitty apuviivat "mittausta" varten.
1. 7--5--15--10--12--21 (jos luettelualue n asti, niin pois x > n)
2. 6--14--20--8--19--17
3. 5--7--9--11--13--15

Liite V 1. Lukujonotaitojen mittari

ENUM. "Laskehan" jonkin matkaa ykkösestä alkaen kunnes keskeytän (1 - 42)
UP1-5. Jatka "laskemista"; 6,7,...;8,...;13,14,...;14,...;22,...
AF1-3. Mikä luku tulee (heti) luvun x jälkeen? x=7, 13 ja 22
BEF1-3. Mikä luku on (välittömästi) ennen lukua x? x=8, 14 ja 23

Seuraavissa tehtävätyypeissä on orientoiva esimerkki-instruktio
Esim. 1. Laske lukuun 4 asti; 1,2,3,4
TO1-2. Laske lukuun x asti; x=8 ja 16
Esim. 2. Laske taaksepäin luvusta 4 alkaen; 4,3,2,1
DO1-2. Laske taaksepäin luvusta x alkaen; x=8 ja 16
Esim. 3. Laske luvusta 2 lukuun 4; 2,3,4 tai 3,4
UPTO1-3. Laske luvusta x lukuun y; x=3,6,17 ja y=9,13,23 vastaavasti
Esim. 4. Laske taaksepäin luvusta 4 lukuun 2; 4,3,2 tai 3,2
DOTO1-3. Laske taaksepäin luvusta y lukuun x; y=9,13,23 ja x=3,6,17

"Pikkuvälitunti"
BET1-3. Mitkä luvut ovat lukujen x ja y välissä? x=5,13,23 ja y=8,16,26
Esim. 5. Laske luvusta 3 kaksi lukua eteenpäin; 3,4,5 tai 4,5
UPBY1-3. Laske luvusta 6 "n" lukua eteenpäin; n=2,5 ja 8
UPBY4-6. Laske luvusta 14 "n" lukua eteenpäin; n=2,5 ja 8
Esim. 6. Laske luvusta 5 kaksi lukua taaksepäin; 5,4,3 tai 4,3
DOBY1-3. Laske luvusta 9 "n" lukua taaksepäin; n=2,5 tai 8
DOBY4-6. Laske luvusta 14 "n" lukua taaksepäin; n=2,5 tai 8

"Pikkuvälitunti"
SABY1-5. Jatka kymmenlukuja; 10,20,...; Jatka kahden välein 2,4,6,...;
Jatka kolmen välein; 3,6,...; Jatka neljän välein;4,8,...;
Jatka viiden välein; 5,10,...; kaksi seuraavaa lukua riittää.
BS1-8. Mikä luku on yhtä suurempi kuin luku 7?
Mikä luku on yhtä pienempi kuin luku 8?
Mikä luku on kahta suurempi kuin luku 6?
Mikä luku on kahta pienempi kuin luku 7?
Mikä luku on kolmea suurempi kuin luku 6?
Mikä luku on kolmea pienempi kuin luku 10?
Mikä luku on kolmea suurempi kuin luku 9?
Mikä luku on kolmea pienempi kuin luku 12?

Liite VI 1. Kardinaalisten ja aritmeettisten kykyjen mittari

El-2. Ota laatikosta yhtä monta palikkaa pöydälle kuin tässä on palikoita (Unifix); palikoiden lkm:t ovat (8) ja (14)

JE. Ota laatikosta kaksi palikkaa enemmän pöydälle kuin on tässä; (13)

Count1. Kuinka monta palikkaa on pöydällä? (7)

Card1. Palikat peitetään. Kuinka monta palikkaa täällä olikaan? (7)

Count2 & Card2. Samat kuin edellä paitsi lkm on nyt (14)

COBP1-3. Tässä on 6 mustaa ja 3 punaista palikkaa. Kuinka monta yhteensä.
Tässä on 6 mustaa ja 5 punaista palikkaa. Kuinka monta yhteensä?
Tässä on 14 mustaa ja 3 punaista palikkaa. Kuinka monta yhteensä?

JOIP1-3. Jos lisäät näihin 7 palikkaan 2 palikkaa, kuinka monta saat?
Jos lisäät näihin 7 palikkaan 4 palikkaa, kuinka monta saat?
Jos lisäät näihin 14 palikkaan 3 palikkaa, kuinka monta saat?

SEPM1-3. Jos poistat näistä 14 palikasta 3 palikkaa, kuinka monta jää?
Jos poistat näistä 9 palikasta 2 palikkaa, kuinka monta jää?
Jos poistat näistä 9 palikasta 5 palikkaa, kuinka monta jää?

JOIM1-3. Kuinka monta palikkaa on lisättävä 7 palikkaan, jotta saat 8 p?
Kuinka monta palikkaa on lisättävä 7 palikkaan, jotta saat 9 p?
Kuinka monta palikkaa on lisättävä 14 palikkaan, jotta saat 16 p?

RJOIM1-3. Kuinka monta palikkaa on poistettava 8 palikasta, jotta jää 7 p?
Kuinka monta palikkaa on poistettava 9 palikasta, jotta jää 7 p?
Kuinka monta palikkaa on poistettava 15 palikasta, jotta jää 13 p?

Edellisissä tehtävissä lapsen edessä on aina sopiva määrä palikoita, joita hän voi käyttää apuna jos haluaa. JOIM ja RJOIM tehtävät esitetään aina vuorotellen; JOIM1, RJOIM1 ja niin edelleen.

COBM1-3. Pöydällä on kaikkiaan 7 palikkaa. Osa on näkyvissä ja osa on peiton alla. Kuinka monta on peiton alla? (5), (3) ja (1)

COBM4-5. Pöydällä on nyt kaikkiaan 9 palikkaa. Kuinka monta on piilossa? (3)
Pöydällä on nyt kaikkiaan 12 palikkaa. Kuinka monta on piilossa? (6)

COMP1-4. Pöydällä on 9 punaista ja 7 sinistä palikkaa. Kuinka monta punaista palikkaa on enemmän kuin sinistä palikkaa?
Kuinka monta sinistä palikkaa on vähemmän kuin punaista palikkaa?
Tässä on 7 mustaa palikkaa. Valkoisia palikoita on 2 enemmän. Kuinka monta valkoista palikkaa on tällöin?
Tässä on 8 ruskeaa palikkaa. Valkoisia palikoita on 2 vähemmän. Kuinka monta valkoista palikkaa tällöin on?

PRS1-3. Seuraavissa tehtävissä saat ottaa laatikosta tietyn määrän palikoita. Kysyn aina välillä kuinka monta olet jo ottanut.
Ota laatikosta 7 palikkaa. (3. ja 5. kohdalla kysymys)
Ota laatikosta 14 palikkaa. (4. ja 6. palikan kohdalla kysymys)
Ota laatikosta 9 palikkaa. (3. ja 6. palikan kohdalla kysymys)

Tehtävä PRS1 esitetään ennen tehtävää JOIP1, PRS2 ennen tehtävää JOIP3 ja tehtävä PRS3 ennen tehtävää SEPM1.

Liite VII 1. Mittauskykyjen mittari

COV1. Peitä tämä suikale tarkasti näillä valkoisilla pikkulaatoilla (4 cm). Kuinka monta pikkulaattaa tarvitsit? (6 kpl)

COV2. Lapsi toteaa, että d (sininen laatta)= d (valkoinen laatta). Kuinka monta sinistä laattaa tarvitset suikaleen peittämiseen? (6 kpl)

COV3. Lapsi toteaa, että d (punainen laatta) > d (valkoinen laatta). Suikale peitetään. Tarvitaanko siihen punaisia laattoja enemmän vai vähemmän kuin valkoisia laattoja? (d (pun.laatta)=6cm)

COV4. Lapsi toteaa, että d (vihreä laatta) < d (valkoinen laatta). Suikale peitetään. Tarvitaanko siihen vihreitä laattoja enemmän vai vähemmän kuin valkoisia laattoja? (d (vihreä laatta) = 2 cm)

MOT1-3. Tässä näet "autoradan". Sinun "autosi" on tämä ja liikkuu täältä tännepäin. Minun "autoni" on tämä ja liikkuu vastakkaiseen suntaan, täältä tänne. Sinä siirrät autoasi aina yhtä pitkän matkan kuin minä. Jokaisen tehtävän yhteydessä saat erilaisen mitan käyttöösi.

MOT1. Siirrä autoasi tarkasti yhtä pitkä matka kuin siirrän omaani. (siirto 20 cm). Tässä viivain (30 cm) apuna tai mittavälineenä.

MOT2. Siirrä autoasi tarkasti yhtä pitkä matka kuin siirrän omaani. (siirto 10 cm). Tässä paperiluiska ja kynä apuna. Luiskan pituus 15 cm.

MOT3. Siirrä autoasi tarkasti yhtä pitkä matka kuin siirrän omaani. (siirto 15 cm). Tässä 5 cm luiska mittavälineenä. Autoradan pituus kaikissa tehtävissä sama 34 cm.

TRAV1-3. Nyt tutkitaan kumpi eläimistä kulkee pidemmän matkan. Jokaisessa tehtävässä saat käyttää tällaista mittaa (4 cm luiska) tällä tavoin. Kokeile. Lapsi kokeilee harjoituksena murtoviivaan.

TRAV1. Tässä näet kaksi polkua. Joutuuko poni kulkemaan pidemmän, yhtä pitkän vai lyhyemmän matkan kuin kissa? Murtoviivojen osien lkm:t samat (7) kuten myös pituudet (4 cm); murtoviivojen loppupäät ovat eri tasoilla.

TRAV2. Tässä näet kaksi polkua. Joutuuko orava kulkemaan pidemmän, yhtä pitkän vai lyhyemmän matkan kuin nalle? Murtoviivojen osien lukumäärät ovat tässä tehtävässä 7 ja 6, sekä osien pituudet samat 4 cm; murtoviivojen loppupäät ovat samalla tasolla.

TRAV3. Tässä näet kaksi polkua. Joutuuko koira kulkemaan pidemmän yhtä pitkän vai lyhyemmän matkan kuin kissa? Murtoviivojen osien lukumäärät ovat tässä tehtävässä 4 ja 8 sekä pituudet vastaavasti 8 cm ja 4 cm; murtoviivojen loppupäät ovat eri tasoilla.

TRAV1-3 tehtävissä eläinhahmot ovat kiiltokuvia; koko noin 3·4 cm^2.

L ja EL. Nämä tehtävät mittaavat standardimittayksikön käyttöä (L) sekä ekvivalentin pituuden löytämistä (EL)

L. Kuinka monta senttimetriä tämä rautalanka on? (20 cm). Senttimetrimittana viivoitin, jonka pituus on 30 cm.

EL. Ota tästä yhtä pitkä lanka kuin tämä lanka on.

Liite VII 2. Kognitiivisten kykyjen ja mittauskykyjen korrelaatiomatriisi (N=35)

	MT	COV	TCOV	MOT	TRAV	SMOT	STRAV
MT		-08	-11	23	26	23	17
COV			73***	22	15	21	13
TCOV				30	19	32	20
MOT					10	94***	02
TRAV						20	95***
SMOT							12
ESP	26	07	07	01	56***	15	46**
ESP(O)	00	-10	-06	-18	26	-06	17
$ESP_m(O)$	16	-08	-06	08	32	22	25
ESP(S)	29	-03	-01	10	57***	24	47**
$ESP_m(S)$	34*	03	-01	07	48**	19	38*
CSP	-02	29	22	45**	09	41*	10
CSP_m	-07	06	13	09	19	05	18
MEASP	04	40*	48**	28	33*	31	38*
$MEASP_m$	10	12	07	38*	47**	41*	39*
TTR	-04	35*	47**	-15	01	00	00
TSUBS	-02	30	42*	-05	09	09	07
TIN	20	38*	55***	20	26	28	25
TNC	22	21	55***	28	24	41*	22
TEJEC	03	43**	50**	19	27	31	25
TLC	14	25	40*	09	45**	25	44***
SSER	-01	-08	24	-14	08	04	12

Liite VII 3. Lukujonotaitojen, aritmeettis-kardinaalisten kykyjen ja mittauskykyjen korrelaatiot(N=35)

	MT	COV	TCOV	MOT	SMOT	TRAV	STRAV
UP	05	-13	19	-11	12	20	18
AF	06	-02	30	-04	14	23	19
BEF	05	-13	10	-13	12	18	15
TO	04	-10	-25	-07	00	01	-02
DO	22	-19	02	-02	17	01	-08
UPTO	24	-13	10	19	39*	14	04
DOTO	37*	-07	05	07	24	35*	21
UPBY	12	26	43	11	26	29	19
DOBY	27	26	42*	17	35*	22	14
SABY	23	02	27	05	17	09	03
BS	40*	01	19	06	22	52**	43**
BET	-13	30	34*	-05	13	32	29
ENUM	-05	-18	11	-07	14	12	05
COUNT	17	-08	-22	-25	-18	07	02
CARD	-16	-04	-14	-20	-28	-25	-11
PRS	08	13	07	-11	-06	33*	31
COBP	-04	-08	-06	-33	-09	18	17
JOIP	27	11	15	-14	-03	10	10
SEPM	13	19	41*	13	23	06	-01
JOIM	04	-11	-07	-12	09	-01	-08
RJOIM	10	-09	-06	-09	07	02	-02
COBM	19	-02	19	-01	21	32	24
COMP	29	33*	47**	13	30	43**	37*
EJE	-19	04	08	-41*	-27	25	25

Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitoksen julkaisusarjassa aiemmin ilmestyneet julkaisut:

N:o 1 Tapio KERANTO, Esikouluikäisen lapsen lukukäsitteen kehitysasteesta ja laskuvalmiuksista, 1978.

N:o 2 Tapio KERANTO, Lapsen lukukäsitteen kehittymisen ja kehittämisen didaktinen näkökulma, 1979.

N:o 3 Jussi ISOSAARI, Hämeenlinnan seminaari - opettajankoulutuslaitos 60 vuotta, 1981.

N:o 4 Helli VOUTILAINEN, Opettajien työtyytyväisyys, tutkimus Hämeen läänin peruskoulun yläasteen opettajien työtyytyväisyydestä ja siihen liittyvistä tekijöistä, 1982.

N:o 5 Sinikka OJANEN, Tutkimus sellaisen yläasteen pienluokan vaikutuksesta, jossa oppilasaines koostuu puoleksi häiriintyneistä ja puoleksi häiriintymättömistä, 1982.

N:o 6 Pekka RUOHOTIE, Aikuisen opiskelumotivaatio, 1982.

N:o 7 Kimmo LAPINTIE, Johdatus tieteenfilosofiaan. Opetusmoniste, 1983.